Fonctions de référence

Exercices récapitulatifs

C. Scolas

https://bit.ly/3W4ZXWm

QVC

1. Une fonction f est définie par $f(x)=\dfrac{3-x}{2x+1}$.

   (1) Calcule l'image de 3.

   $f(3)=\dfrac{3-3}{2.3+1}=\dfrac{0}{7}=0$

   (2) Calcule l'image de 0.

   $f(0)=\dfrac{3-0}{2.0+1}=\dfrac{3}{1}=3$

   (3) Calcule tous les antécédents de -2.

   $\dfrac{3-x}{2x+1}=-2 \Leftrightarrow 3-x=-2.(2x+1)$

   $\Leftrightarrow 3-x=-4x-2$

   $\Leftrightarrow 3x=-5$

   $\Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{3}$

2. Une fonction f est définie par $f(x)=4x^2-4x+7$.

   (1) Calcule l'image de -2.

   $f(-2)=4.(-2)^2-4.(-2)+7=4.4+8+7=16+8+7=31$

   (2) Calcule tous les antécédents de 3.

   $4x^2-4x+7=3 \Leftrightarrow 4x^2-4x+4=0$

   $\Leftrightarrow (2x-1)^2=0$

   $\Leftrightarrow 2x-1=0$

   $\Leftrightarrow x=1/2$

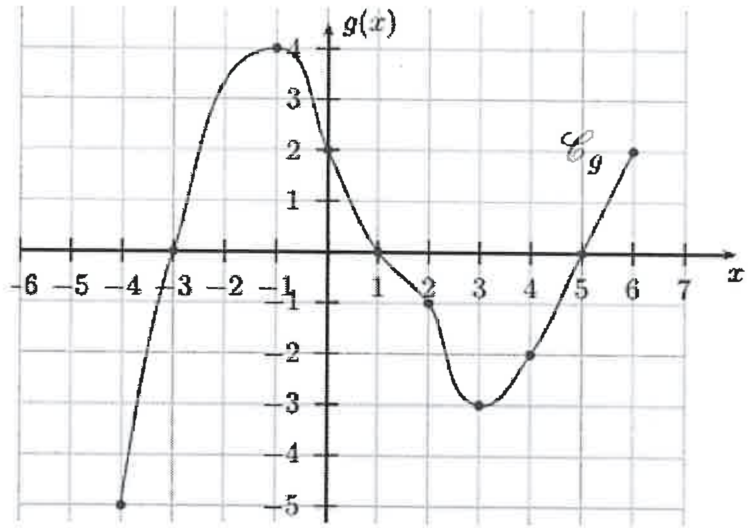
   (3) Calcule tous les antécédents de 7.

   $4x^2-4x+7=7 \Leftrightarrow 4x^2-4x=0$

   $\Leftrightarrow 4x.(x-1)=0$

   $x=0$ $\quad$ $x=1$

3. On considère la fonction g dont on donne la courbe représentative ci-dessous :



(1) Quel est son domaine de définition ? $[-4;6]$

(2) Que vaut l'image de -4 ? -5

(3) Donne tous les antécédents de -3. $-3,7$; 3

(4) Quel est l'ensemble des réels qui ont une image positive par g ? $[-3;1] \cup [5;6]$

(5) Donne les coordonnées du(des) maximum(s). $(-1;4)$ et $(6;2)$

(6) Dresse le tableau de signe de cette fonction.

x	-4		-3		1		5		6
$f(x)$	-5	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	2

(7) Dresse le tableau de variation de cette fonction.

x	-4		-1		3		6
$f(x)$	-5	$\nearrow$	4	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2

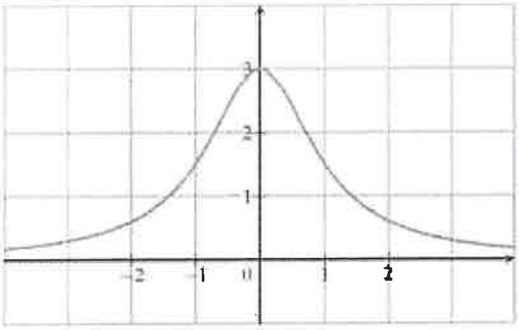
4. Sans tracer le graphe de la fonction $f(x)=x^2+8x-11$, le point $P(2;7)$ appartient-il à G_f ?

$f(2) = 2^2 + 8.2 - 11 = 4 + 16 - 11 = 9 \neq 7 \Rightarrow P \notin G_f$

5. Donne l'expression analytique d'une fonction passant par les points $A(-1;2)$ et $B(3;2)$.

$f(x) = 2$

6. Pour chaque fonction, indique sa parité, établis son tableau de variation et son tableau de signe.



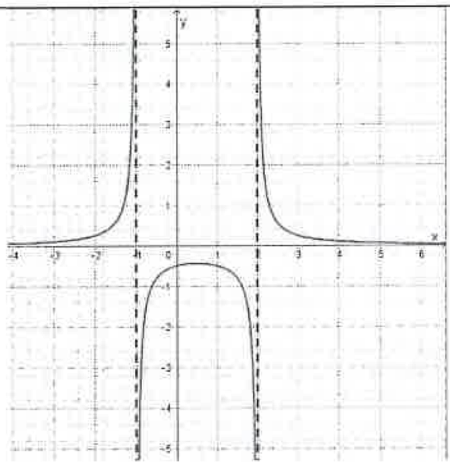
Fonction paire

TV :

x		0	
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

TS :

x	
$f(x)$	$+$



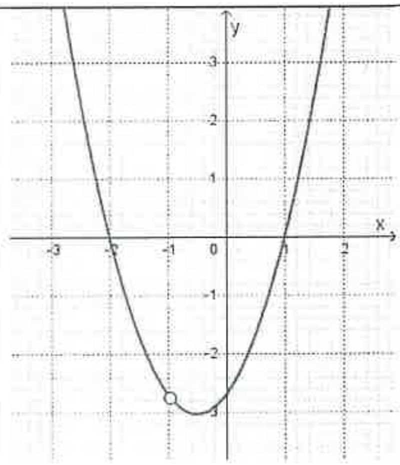
Fonction quelconque

TV :

x		-1		$1/2$		2	
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	$-1/2$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

TS :

x		-1		2	
$f(x)$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$



Fonction quelconque

TV :

x		-1		$-1/2$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

TS :

x		-2		-1		1	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$

7. Détermine algébriquement la parité des fonctions suivantes :

(1) $f(x)=\dfrac{2}{3+x}+\dfrac{2}{3-x}$

$f(-x)=\dfrac{2}{3+(-x)}+\dfrac{2}{3-(-x)}=\dfrac{2}{3-x}+\dfrac{2}{3+x}=f(x)\rightarrow f$ est paire

(2) $f(x)=1-4x^2$

$f(-x)=1-4\cdot(-x)^2=1-4x^2=f(x)\rightarrow f$ est paire

(3) $f(x)=\dfrac{x}{x^3-2x}$

$f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^3-2(-x)}=\dfrac{-x}{-x^3+2x}=\dfrac{+x}{+(x^3-2x)}=f(x)\rightarrow f$ est paire

8. Pose les conditions d'existence et détermine le domaine de définition de chaque fonction :

(1) $f(x)=\dfrac{2}{4x^2+8x}$

CE: $4x^2+8x\neq 0$

$4x\cdot(x+2)\neq 0$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x\neq 0 \qquad x\neq -2$

$\Rightarrow \text{dom } f=\mathbb{R}\setminus\{0;-2\}$

(2) $f(x)=\sqrt{4-7x}$

CE: $4-7x\geqslant 0$

$4\geqslant 7x$

$\frac{4}{7}\geqslant x$

$\Rightarrow \text{dom } f=\left]\leftarrow;\frac{4}{7}\right]$

(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{6+8x}}{\sqrt{1-x}}$

CE1: $6+8x\geqslant 0$

$x\geqslant -\frac{3}{4}$

CE2: $1-x>0$

$1>x$

$\Rightarrow \text{dom } f=\left[-\frac{3}{4};1\right[$

(4) $f(x)=\dfrac{-3}{4x+5}$

CE: $4x+5\neq 0$

$x\neq -\frac{5}{4}$

$\Rightarrow \text{dom } f=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{5}{4}\}$

(5) $f(x)=\dfrac{4x+4}{36x^2+12x+1}$

CE: $36x^2+12x+1\neq 0$

$(6x+1)^2\neq 0$

$x\neq -\frac{1}{6}$

$\Rightarrow \text{dom } f=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{6}\}$

(6) $f(x)=\dfrac{-3+x}{-6x-12}$

CE: $-6x-12\neq 0$

$x\neq -2$

$\Rightarrow \text{dom } f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

(7) $f(x)=\sqrt{6x^2-4x}$

CE: $6x^2-4x \geq 0$

$2x.(3x-2) \geq 0$

Racines: $2x.(3x-2)=0$

$x=0 \qquad x=\frac{2}{3}$

x		0		$\frac{2}{3}$	
$2x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x.(3x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow \text{dom } f = \leftarrow ; 0] \cup [\frac{2}{3} ; \rightarrow$

(8) $f(x)=\frac{-3x}{\sqrt{-x}}$

CE: $-x>0$

$x<0$

$\Rightarrow \text{dom } f = \leftarrow ; 0[$

(9) $f(x)=\frac{-3x}{\sqrt{-2x+12}}$

CE: $-2x+12>0$

$12>2x$

$6>x$

$\Rightarrow \text{dom } f = \leftarrow ; 6[$

(10) $f(x)=\sqrt{\frac{-3x}{-2x+12}}$

CE: $\frac{-3x}{-2x+12} \geq 0$

Racines: N $-3x=0$

$x=0$

D $-2x+12=0$

$x=6$

x		0		6	
$-3x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$-2x+12$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{-3x}{-2x+12}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

$\Rightarrow \text{dom } f = \leftarrow ; 0] \cup]6 ; \rightarrow$

(11) $f(x)=\sqrt{(3-x).(x+2)}$

CE: $(3-x).(x+2) \geq 0$

Racines: $(3-x).(x+2)=0$

$x=3 \qquad x=-2$

x		-2		3	
$3-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(3-x).(x+2)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow \text{dom } f = [-2 ; 3]$

(12) $f(x)=\sqrt{(2x-5).(4x+1)-(2x-5).(6x-5)}$

$= \sqrt{(2x-5).((4x+1)-(6x-5))}$

$= \sqrt{(2x-5).(-2x+6)}$

CE: $(2x-5)(-2x+6) \geq 0$

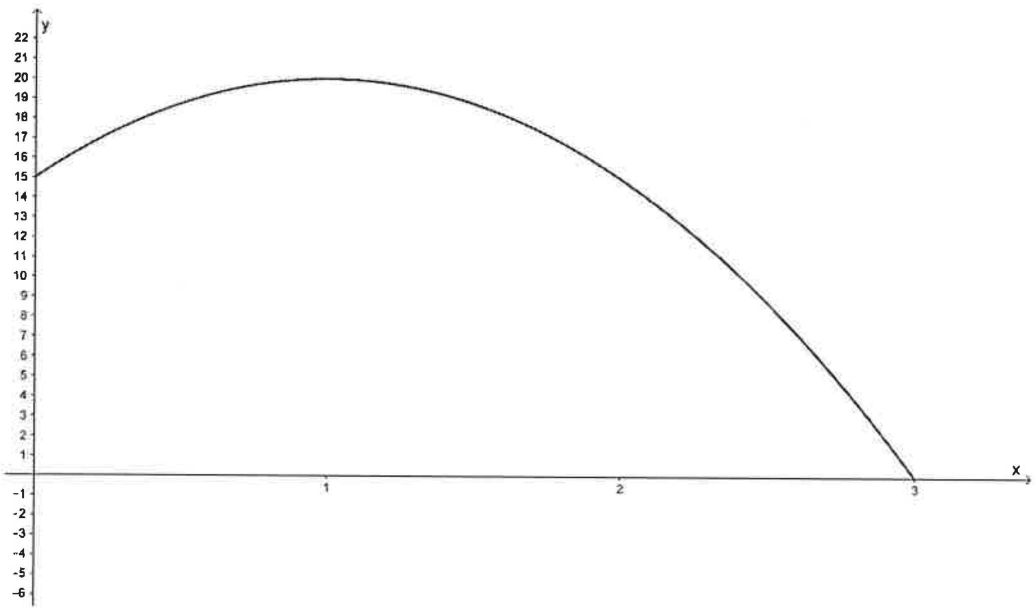
Racines : $(2x-5).(-2x+6)=0$

$x=\frac{5}{2}$ $\quad$ $x=3$

x		$5/2$		3	
$2x-5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-2x+6$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(2x-5)(-2x+6)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow \text{dom} f = [\frac{5}{2}; 3]$

9. La trajectoire d'une balle de jeu est donnée par $f(x)=-5x^2+10x+15$ où x est le temps écoulé depuis le lancement en l'air, exprimé en secondes, avec $x \in [0;3]$ et $f(x)$ est la hauteur de la balle au-dessus du sol, exprimée en mètres.



(1) Donne l'image de 0 et donne une interprétation.

$f(0)=15$ Initialement, la hauteur de la balle est de 15m

(2) Donne $f(3)$ et donne une interprétation.

$f(3)=0$ Après 3 secondes, la balle touche le sol

(3) D'après le graphique, quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle ?

20 m

(4) Donne les instants où la hauteur est égale à 15 m.

0 et 2 s

10. Pour chacune des fonctions suivantes, calcule les racines ainsi que l'ordonnée à l'origine :

(1) $f(x)=\dfrac{x(x+4)}{3-2x}$

Racines : $f(x)=0 \Leftrightarrow x.(x+4)=0$

$x=0$ $\quad$ $x=-4$

O.A.O : $f(0)=\dfrac{0.(0+4)}{3-2.0}=\dfrac{4}{3}$

(2) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+x}$

Racine : $f(x)=0 \Leftrightarrow x-3=0$

$\Leftrightarrow x=3$

OAO : $f(0)=\dfrac{0-3}{0^2+0}=\dfrac{-3}{0}=\nexists$

(3) $f(x)=\dfrac{2x}{16-x^2}$

Racine : $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x=0$

$\Leftrightarrow x=0$

OAO : $f(0)=\dfrac{2.0}{16-0^2}=\dfrac{0}{16}=0$

(4) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{-2x^2-3}$

Racines : $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0$

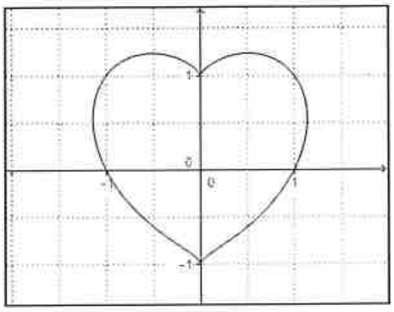
$\Leftrightarrow (x-2).(x+2)=0$

$x=2$ $\quad$ $x=-2$

OAO : $f(0)=\dfrac{0^2-4}{-2.0^2-3}=\dfrac{-4}{-3}=\dfrac{4}{3}$

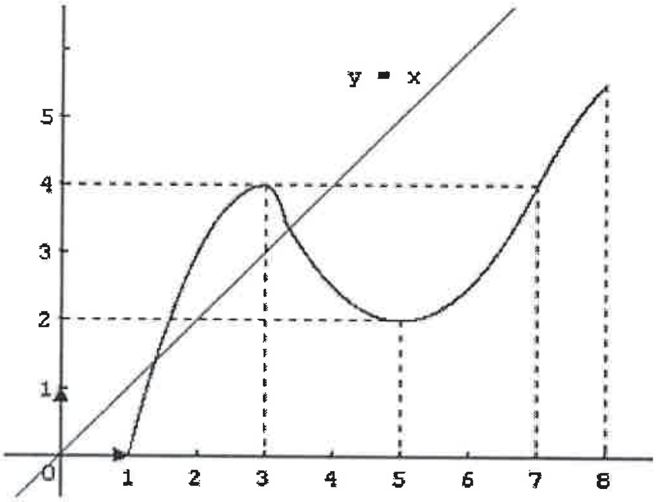
11. Explique pourquoi le graphique ci-dessous n'est pas celui d'une fonction.

Ce graphique n'est pas celui d'une fonction car certains réels ont plusieurs images.



12. On a représenté ci-dessous la droite d'équation $y = x$ et la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[1;8]$.

Réponds par vrai ou faux aux questions suivantes :



(1) 1 a pour image 0 par la fonction f. ...V.......

(2) L'image de 0 par f vaut 1. ....F......

(3) 7 est un antécédent de 4 par f. ....V....

(4) Un antécédent de 4 par f vaut 3 ...V......

(5) $f(3) = 4$.....V.....

(6) $f(2) = 5$.....F.....

(7) $f(3) > f(5)$ ....V.....

(8) 2,5 a trois antécédents par la fonction f. ....V.....

(9) 0,5 a un seul antécédent par la fonction f. ...V......

(10) L'équation $f(x) = 3$ a au moins une solution dans l'intervalle $[1;8]$...V....

(11) L'équation $f(x) = x$ a au moins une solution dans l'intervalle $[1;8]$...V....

(12) f est croissante sur l'intervalle $[1;8]$.....F......

(13) Si x appartient à l'intervalle $[4;5]$,alors $f(x) > x$. ...F........

(14) Si a et b appartiennent à l'intervalle $[3;5]$ et si $a \leq b$, alors $f(a) \leq f(b)$. ..F.....

13. Une fonction g possède les propriétés ci-dessous :

(1) elle est définie sur $[-7;4]$

(2) elle est décroissante sur $[-7;-3]$

(3) elle est croissante sur $[-3;0]$

(4) elle est décroissante sur $[0;2]$

(5) elle est croissante sur $[2;4]$

(6) sur l'intervalle $[-7;0]$, son maximum vaut -5

(7) sur l'intervalle $[-3;2]$, son maximum vaut 8

(8) sur l'intervalle $[0;4]$, son minimum vaut -1

(9) l'image de -7 est 1

(10) 4 est un antécédent de 6

Trouve les erreurs qui se sont glissées dans le tableau de variation de cette fonction :

x	-7		-3		0		2		6
$g(x)$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	8	$\searrow$	-3	$\nearrow$	4

(1) dom $g = [-7;6]$

(2) vrai

(3) vrai

(4) vrai

(5) elle est croissante sur $[2;6]$

(6) son minimum vaut -5

(7) vrai

(8) sur l'intervalle $[0;6]$, son minimum vaut -3

(9) l'image de -7 est 2

(10) 4 est l'image de 6