C. Caractéristiques graphiques des fonctions du second degré

Crée un support de cours pour cette partie de chapitre qui te permettra d'atteindre les objectifs 4 et 5 pour la compétence « ***SAVOIR*** » et les objectifs 6 à 10 pour la compétence « ***ETRE CAPABLE DE*** ».

Le graphique de toute fonction du second degré $f(x)=ax^2+bx+c$ $\left(a\in\mathbb{R}_0, b \text{ et } c\in\mathbb{R}\right)$ représente une **<u>parabole</u>**.

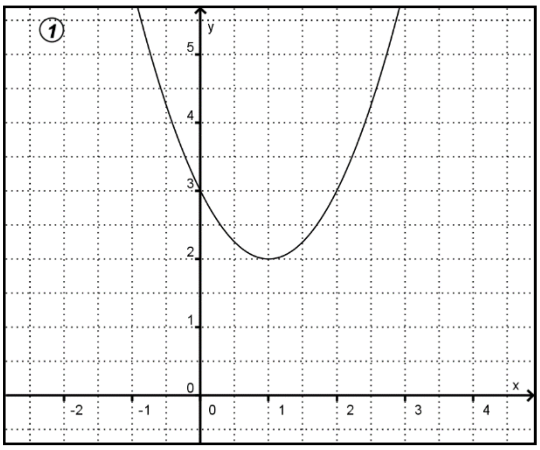
Réalise les exercices suivants. Pour t'aider, tu trouveras des informations aux points 2, 3 et 4 (pages 24 à 26).

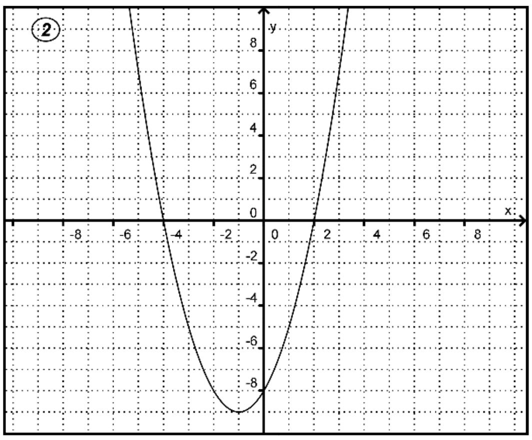
1. Exercices

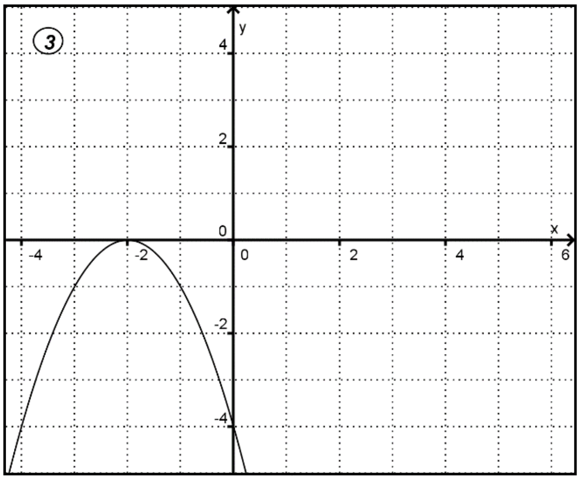
https://bit.ly/3JXtp88

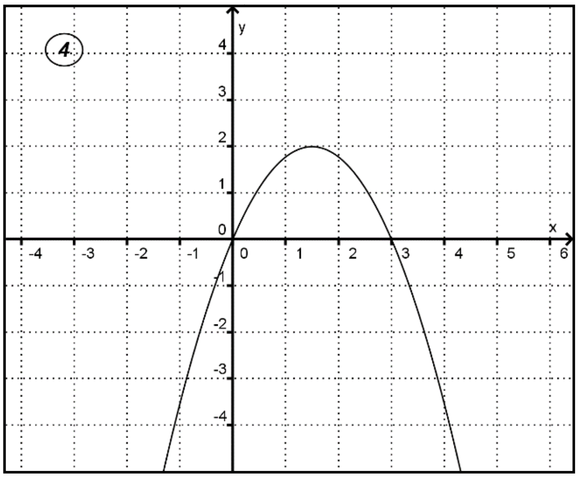
1. Détermine les caractéristiques (coordonnées du sommet, équation de l'axe de symétrie, coordonnées des points d'intersection avec les axes) de chaque parabole représentée ci-dessous.

   Etablis les tableaux de signe et de variation des fonctions correspondantes.









2. Détermine les coordonnées du sommet de la parabole $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$.

3. Détermine l'équation de l'axe de symétrie de la parabole $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

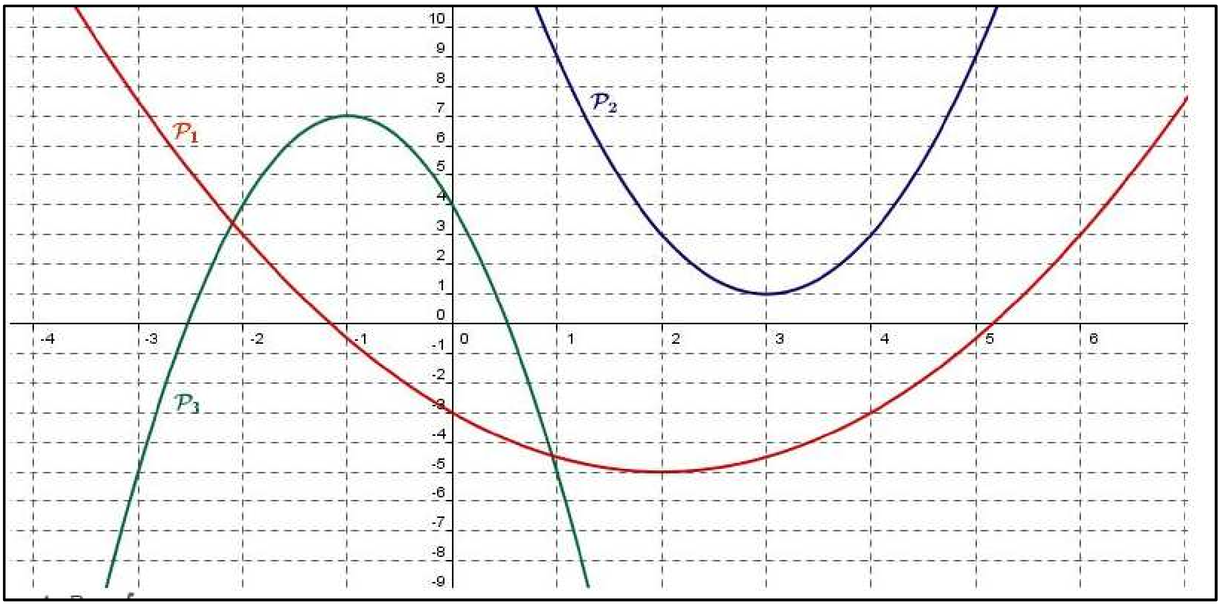
4. Représente le graphique des fonctions $f(x)$ ci-dessous en t'aidant de leur forme canonique :

(1) $f(x) = x^2 + 3x + 2$

(2) $f(x) = -x^2 + x + 6$

(3) $f(x) = -\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{2x}{3} - 2$

5. Détermine une expression générale des fonctions représentées :

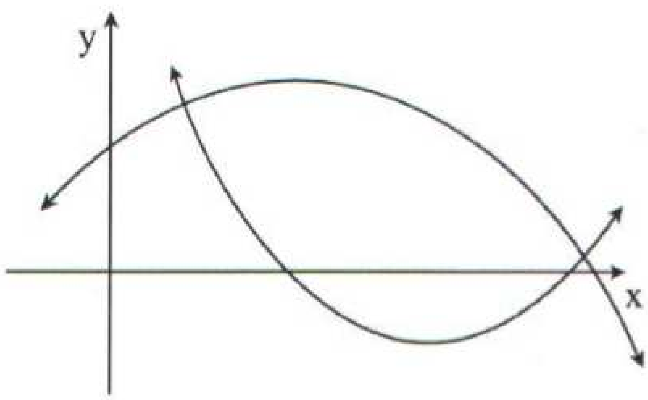


COMMENT DETERMINER L'EXPRESSION GENERALE D'UNE PARABOLE A PARTIR DE SON GRAPHIQUE ?

https://youtu.be/MUZKeDJDFso

6. Détermine u et v pour que les points $A(1;-2)$ et $B(2;1)$ appartiennent à la parabole $\mathcal{P} \equiv y = 3x^2 + 2ux + v$.

7. Les graphiques de deux fonctions du second degré f et g sont représentés ci-dessous :



La fonction f est définie par $f(x) = (x-m)^2 + p$.

La fonction g est définie par $g(x) = -2(x-5)^2 + 100$.

Lequel des énoncés suivants est-il vrai ?

(1) $m > 5$ et $p < 100$

(2) $m > 5$ et $p > 100$

(3) $m < 5$ et $p < 100$

(4) $m < 5$ et $p > 100$

8. Détermine l'équation de la parabole passant par les points $A(1;4)$, $B(-2;-8)$ et $C(4;-20)$.

COMMENT DETERMINER L'EQUATION D'UNE PARABOLE PASSANT PAR 3 POINTS ?

https://youtu.be/KPeKO__mGcE

9. Détermine m et p pour que la parabole $\mathcal{P} \equiv y = -3x^2 + 5mx + p$ ait pour sommet le point $S(5;-3)$.

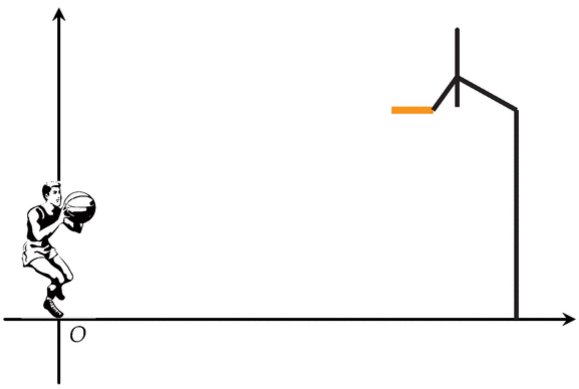
10. On considère la famille de fonctions $f(x) = x^2 + 6x + m$.

    (1) Détermine toutes les valeurs de m pour que le point $P(-1;-2)$ appartienne à G_f.

    (2) Détermine m pour que l'ordonnée du sommet de la parabole soit -10.

    (3) Détermine m pour que la parabole n'ait qu'une seule racine.

11. Lors d'un lancer franc au basket, le joueur se situe à environ 4,60 m du centre du panier, lui-même fixé à 3,05 m du sol.

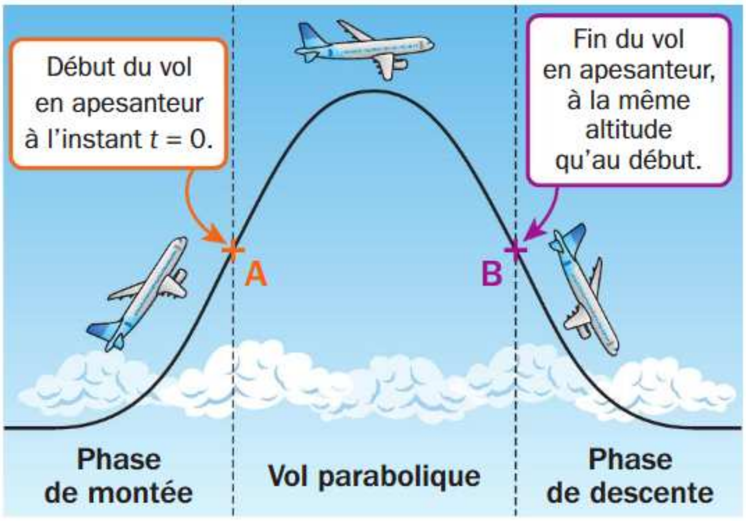


Le joueur lance le ballon au niveau des épaules, c'est-à-dire à 1,65 m du sol. On admettra que, dans le repère choisi, la courbe décrite dans l'espace par le ballon est la parabole d'équation $y = -0,5x^2 - 1,95x + 1,65$, où x est la distance horizontale, en mètres, du ballon au joueur et y la hauteur, en mètres du ballon par rapport au sol.

    (1) Peut-on affirmer que le joueur a réussi son panier ?

    (2) Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon ?

12. En février 2018, l'astronaute français Thomas Pesquet a rejoint l'équipe de pilotes de l'Airbus ZERO-G. Cet avion permet de récréer les conditions de l'apesanteur en décrivant des paraboles grâce à l'alternance de phases de montées et de descentes.



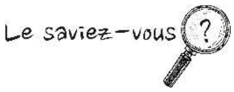
L'altitude $f(t)$ de cet avion (en m) en fonction du temps t (en s) durant un vol parabolique de 22 secondes est donnée par : $f(t) = -\frac{900}{121}t^2 + \frac{1800}{11}t + 7600$ sur $I = [0;22]$.

Lors de ce vol parabolique, au bout de combien de temps l'avion atteindra-t-il son altitude maximale ?

13. *GOOGLE FORM* : « Orientation d'une parabole »
https://forms.gle/fqvuoYexizvhMv8i7

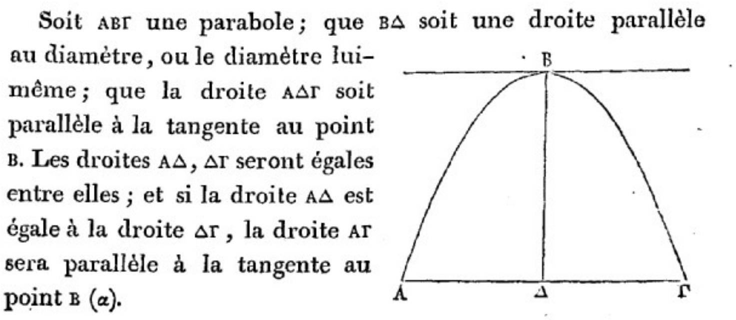
14. *GOOGLE FORM* : « Caractéristiques graphiques des fonctions du second degré »
https://forms.gle/vs8ApwAYThCrg3xR7

15. *GOOGLE FORM* : « Caractéristiques graphiques des fonctions du second degré 2 »
https://forms.gle/6FiEEbqXrpxVxegs6



Archimède est né et mort à Syracuse au III^{e} siècle avant J.-C.

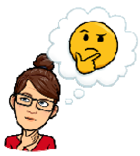
Il est physicien, mathématicien et ingénieur. On connaît peu de détails sur sa vie, mais il est considéré comme l'un des principaux scientifiques de l'Antiquité classique. Il a notamment beaucoup travaillé sur la parabole dont il démontre de nombreuses propriétés dans son traité de géométrie intitulé *La quadrature de la parabole*.



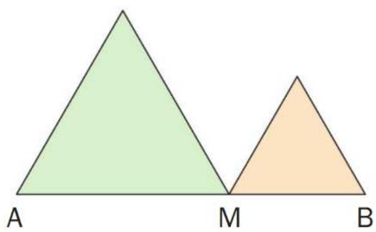
Soit ABΓ une parabole ; que BΔ soit une droite parallèle au diamètre, ou le diamètre lui-même ; que la droite AΔΓ soit parallèle à la tangente au point B. Les droites AΔ, ΔΓ seront égales entre elles ; et si la droite AΔ est égale à la droite ΔΓ, la droite AΓ sera parallèle à la tangente au point B (α).

Œuvres d'Archimède, traduites littéralement par F. Peyrard, éditeur François Buisson, Paris 1837

Pour chercher :



1. Un segment $[AB]$ a pour longueur 12 cm. M est un point du segment $[AB]$ tel que $\overline{AM} = x$ (en cm). On forme sur $[AM]$ et $[BM]$ deux triangles équilatéraux.



   Pour quelle valeur de x la somme des aires (en cm²) de ces triangles est-elle minimale ?

   Sol : $x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ cm

2. Une parabole $y = ax^2 + bx + c$ a pour sommet le point $(4;2)$ et passe par le point $(2;0)$. Que vaut le produit $a.b.c$?

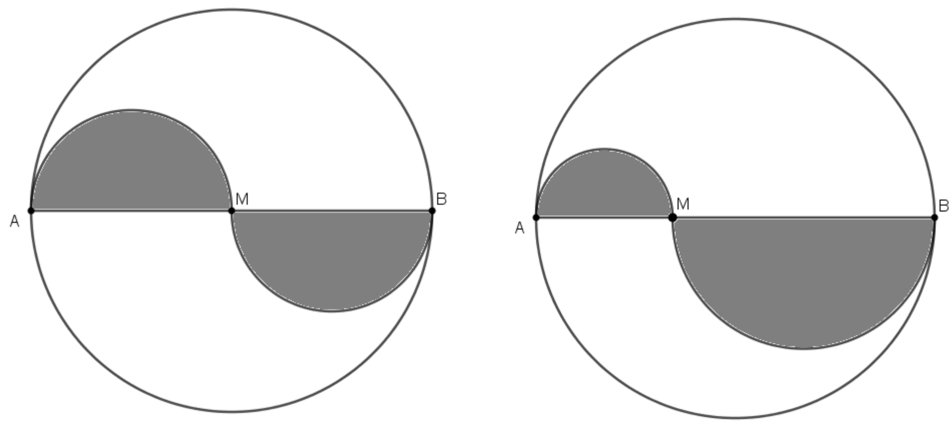
   Sol : 12

3. Sur un diamètre $[AB]$ d'un cercle de rayon 4 cm, on marque un point M. on désigne par $2x$, avec $0 \leq x \leq 4$, la longueur de $[AM]$.

   On trace deux demi-cercles de part et d'autre de la droite AB, de diamètre $[AM]$ pour l'un et $[BM]$ pour l'autre.

   Exprime l'aire de la partie grisée en fonction de x.

   Détermine ensuite la valeur de x pour laquelle cette aire est maximale.



Sol : $S = \pi x^2 - 2\pi x + 2\pi$ et $x = 1$

2. Sommet et axe de symétrie

Les coordonnées du **sommet** d'une parabole $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont données par $\boxed{S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)}$.

Si $a > 0$, le sommet est un minimum : la concavité de la parabole est tournée vers le haut.

Si $a < 0$, le sommet est un maximum : la concavité de la parabole est tournée vers le bas.

De plus, le graphe admet un axe de symétrie d'équation $\boxed{AS \equiv x = -\frac{b}{2a}}$.

Remarque : Résoudre une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ revient à chercher les racines de la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ainsi, le sommet et les racines de la parabole sont des points de repère importants pour en tracer le graphe.

3. Forme canonique

Toute fonction du second degré peut également s'écrire sous **forme canonique** :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + p \quad \text{où } m = -\frac{b}{2a} \text{ et } p = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Exemple : Déterminons la forme canonique de la fonction $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$.

Calculons m et p :

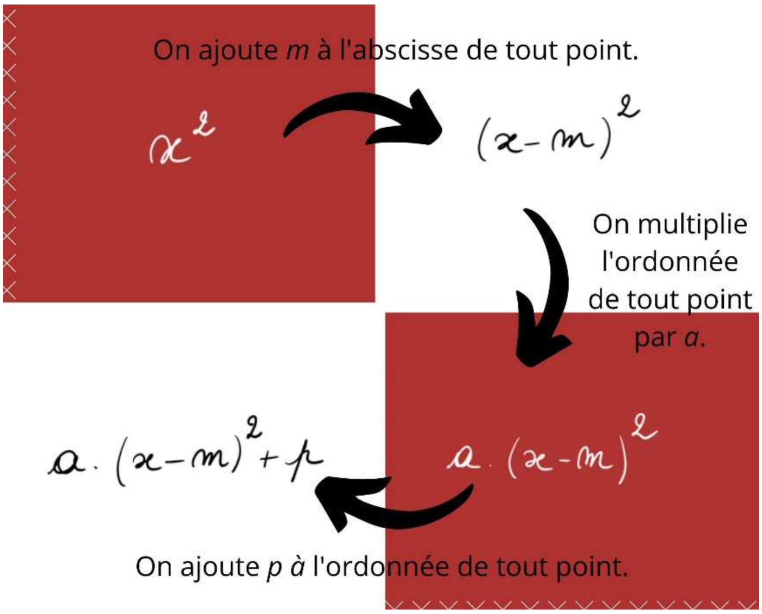
$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2.2} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4.2.(-4) = 36 \rightarrow p = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{4.2} = -\frac{9}{2}$$

Ainsi, $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$

4. Manipulations

En utilisant la forme canonique d'une fonction de second degré, on peut tracer son graphique à partir de la fonction carrée en utilisant trois manipulations graphiques :



Exemple : Traçons le graphique de la fonction $f(x)=2x^2-2x-4$.

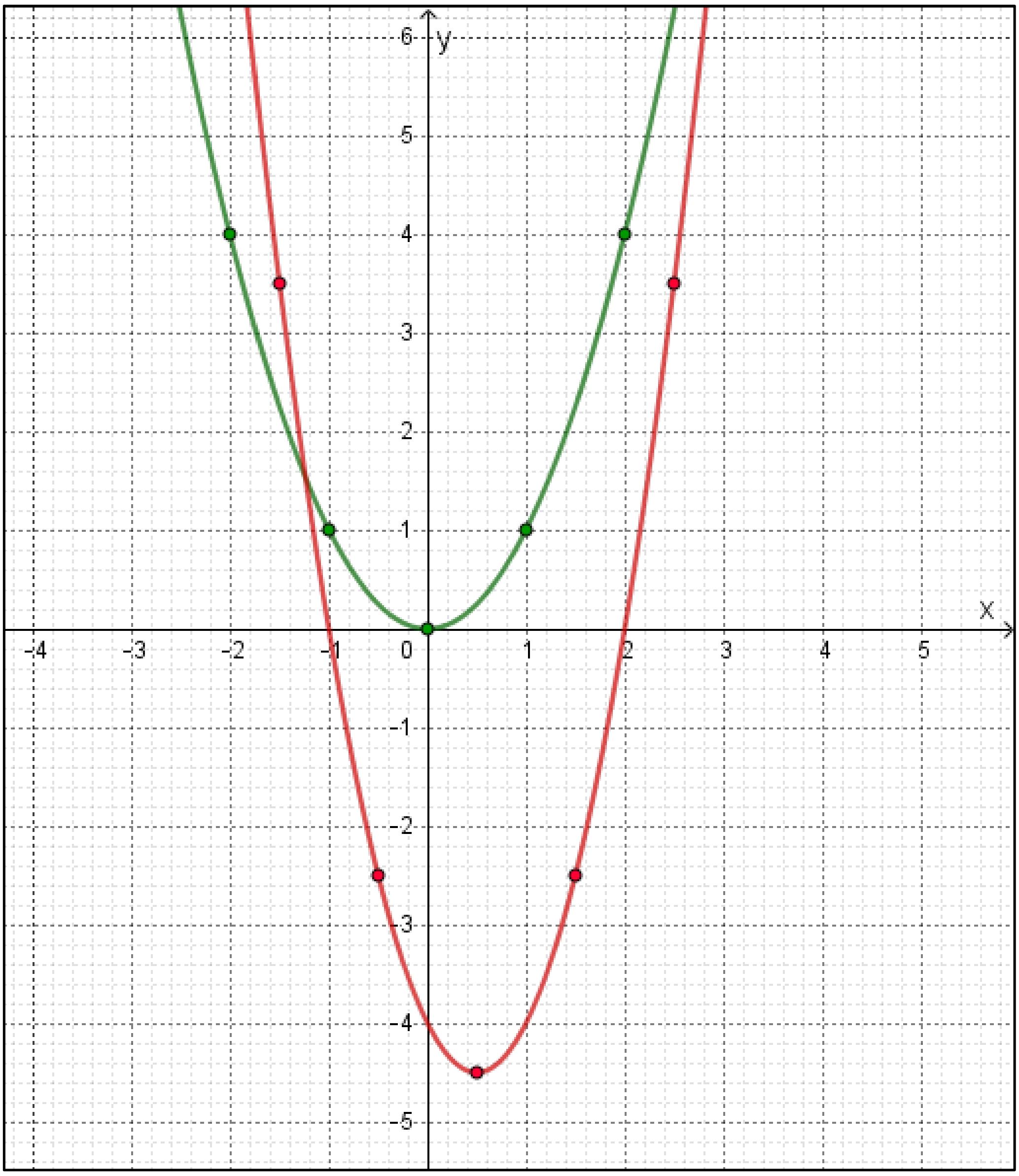
Dans l'exemple précédent, on a calculé la forme canonique de f :

$$f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{2}.$$

Ainsi, pour tracer son graphique, on effectue trois manipulations à partir de la fonction carrée :

1) On ajoute $\frac{1}{2}$ à l'abscisse de tout point.
2) On multiplie l'ordonnée de tout point par 2.
3) On ajoute $-\frac{9}{2}$ à l'ordonnée de tout point.

On obtient alors le graphique suivant :


y
x
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5