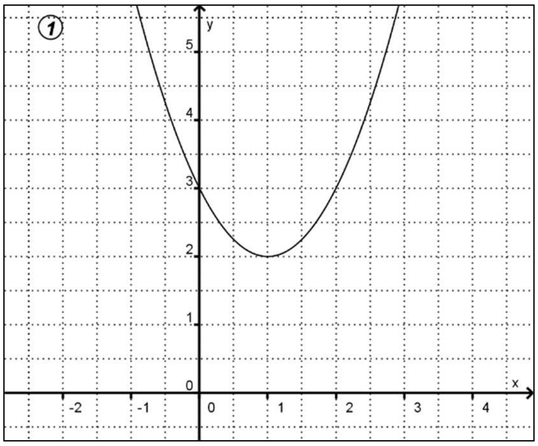
UAA5 : Second degré

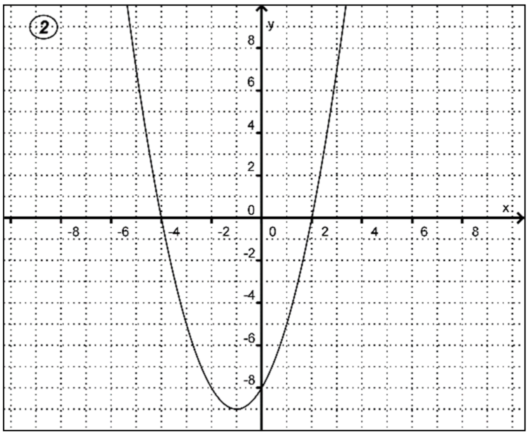
Solutions

C. Caractéristiques graphiques des fonctions du second degré

1. Détermine les caractéristiques (sommet, axe de symétrie, intersection avec les axes) de chaque parabole représentée ci-dessous.

   Etablis les tableaux de signe et de variation des fonctions correspondantes.





Sommet : $(1;2)$

AS $\equiv x=1$

$\bigcap Ox$: aucune

$\bigcap Oy$: $(0;3)$

TS :

x	
$f(x)$	$+$

TV :

x		1	
$f(x)$	$\searrow$	2 min	$\nearrow$

Sommet : $(-1;-9)$

AS $\equiv x=-1$

$\bigcap Ox$: $(-4;0)$ et $(2;0)$

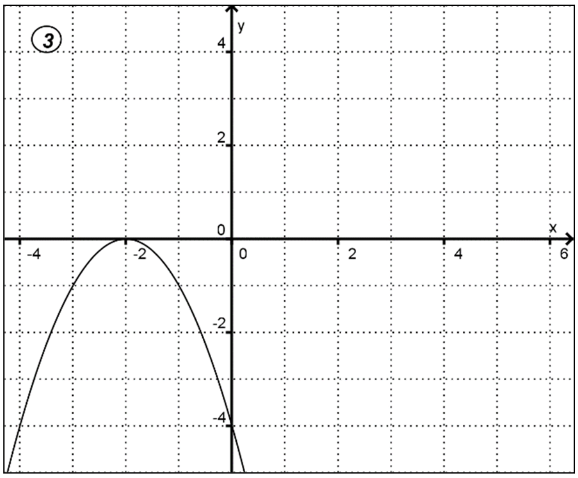
$\bigcap Oy$: $(0;-8)$

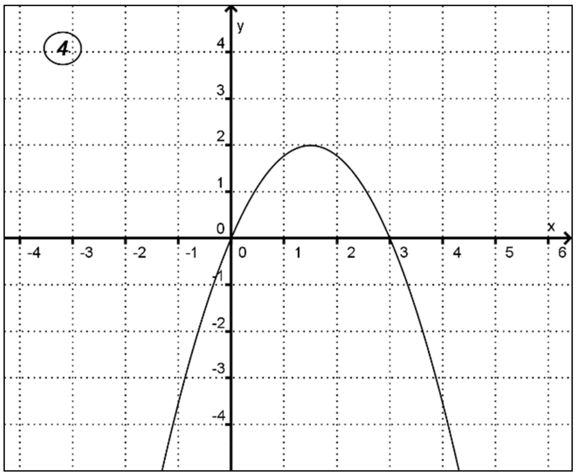
TS :

x		-4		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

TV :

x		-1	
$f(x)$	$\searrow$	-9 min	$\nearrow$





Sommet : $(-2;0)$

$AS \equiv x = -2$

$\cap Ox$: $(-2;0)$

$\cap Oy$: $(0;-4)$

TS :

x		-2	
$f(x)$	$-$	0	$-$

TV :

x		-2	
$f(x)$	$\nearrow$	0 max	$\searrow$

Sommet : $\left(\frac{3}{2};2\right)$

$AS \equiv x = \frac{3}{2}$

$\cap Ox$: $(0;0)$ et $(3;0)$

$\cap Oy$: $(0;0)$

TS :

x		0		3	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

TV :

x		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$\nearrow$	2 max	$\searrow$

2. Détermine les coordonnées du sommet de la parabole $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2.3} = -\frac{6}{6} = -1$$

$$\Delta = 6^2 - 4.3.1 = 36 - 12 = 24$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{24}{4.3} = -\frac{24}{12} = -2$$

➔ $\boxed{S(-1;-2)}$

3. Détermine l'équation de l'axe de symétrie de la parabole $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2.1} = \frac{4}{2} = 2$$ ➔ $\boxed{AS \equiv x = 2}$

4. Représente le graphique des fonctions $f\left(x\right)$ ci-dessous en t'aidant de leur forme canonique :

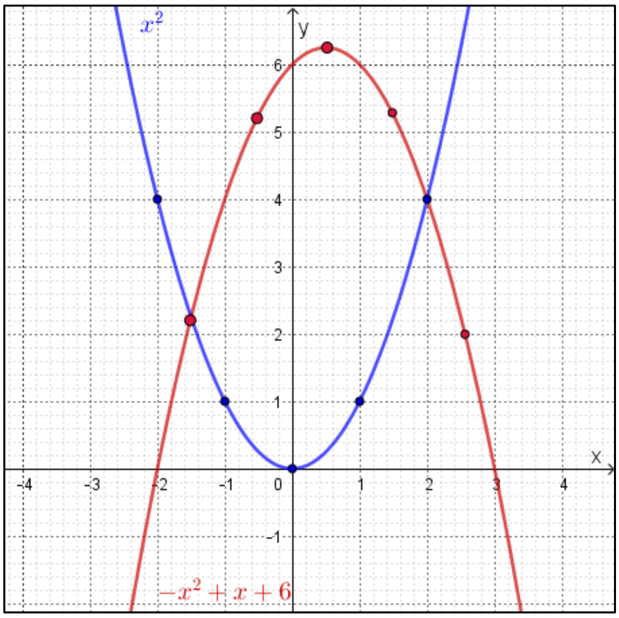
(1) $f\left(x\right)=x^2+3x+2$

$$m=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2.1}=-\frac{3}{2}$$

$$\Delta=3^2-4.1.2=9-8=1$$

$$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{4.1}=-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{f\left(x\right)=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$$



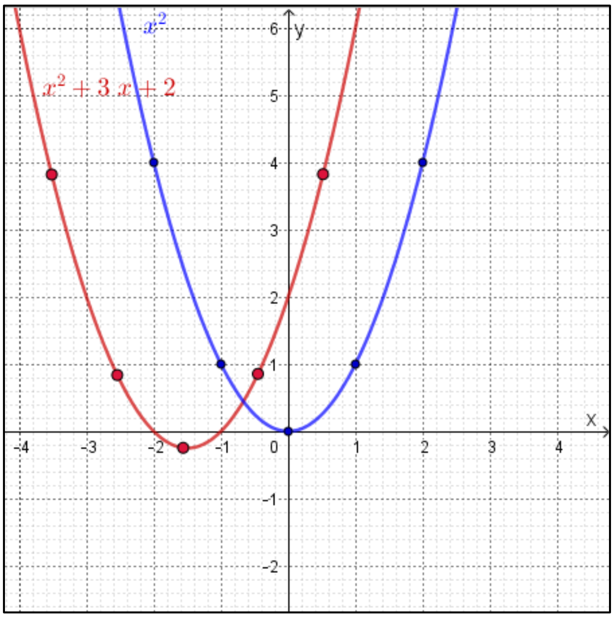
(2) $f\left(x\right)=-x^2+x+6$

$$m=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2.\left(-1\right)}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

$$\Delta=1^2-4.\left(-1\right).6=1+24=25$$

$$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{25}{4.\left(-1\right)}=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{f\left(x\right)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}}$$



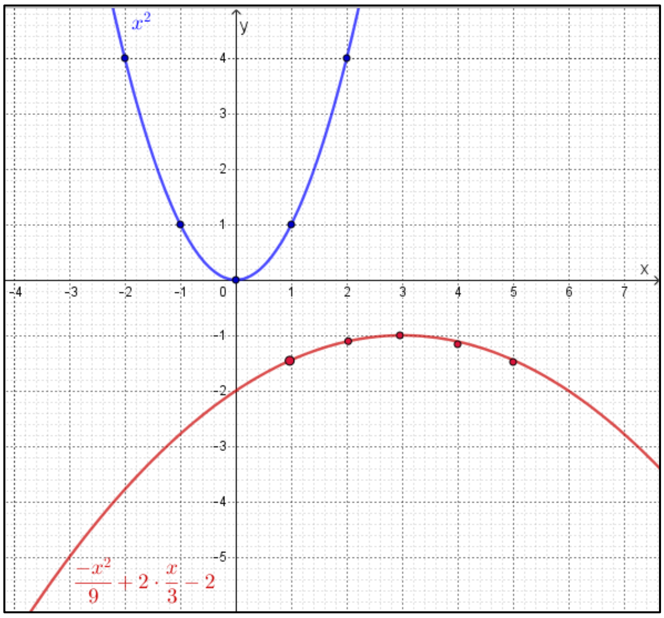
(3) $f(x) = -\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{2x}{3} - 2$

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{2}{3}}{2.\left(-\frac{1}{9}\right)} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{2}{9}} = \frac{2}{3}.\frac{9}{2} = 3$$

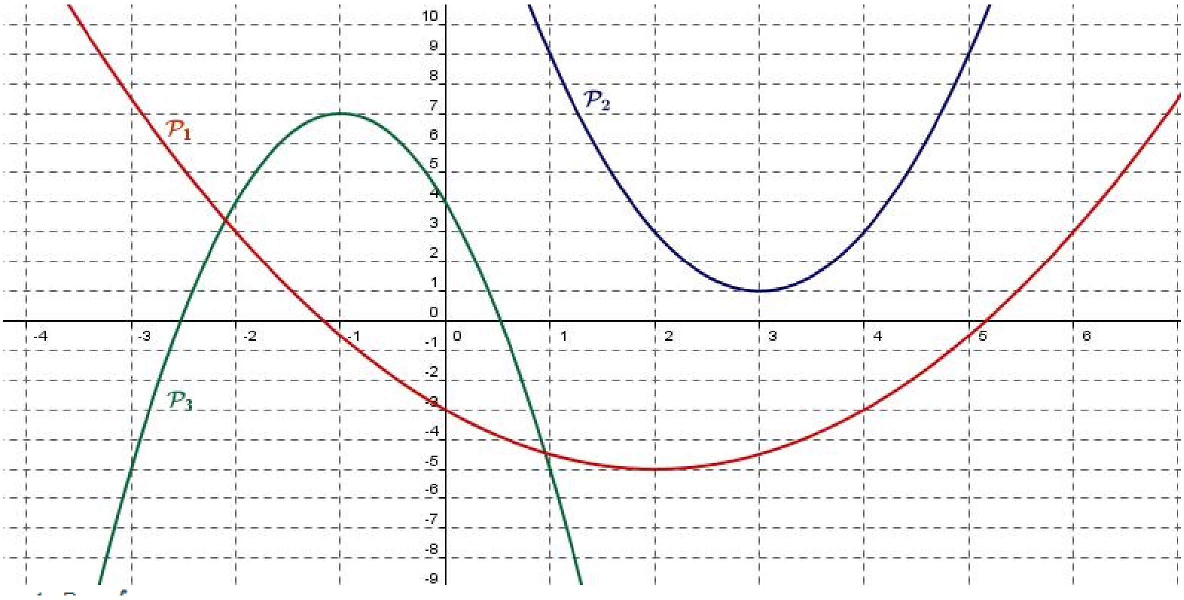
$$\Delta = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4.\left(-\frac{1}{9}\right).(-2) = \frac{4}{9} - \frac{8}{9} = -\frac{4}{9}$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-\frac{4}{9}}{4.\left(-\frac{1}{9}\right)} = -\frac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{9}} = -1$$

$$\rightarrow \boxed{f(x) = -\frac{1}{9}(x-3)^2 - 1}$$



5. Détermine une expression générale des fonctions représentées :



P_1 : Le sommet de la parabole est le point $(2;-5)$. Ainsi, la forme canonique est $y = a.(x-2)^2 - 5$.

Pour déterminer a, on utilise un point de la parabole :

$$\begin{aligned}(4;-3) \in P_1 &\Leftrightarrow -3 = a.(4-2)^2 - 5 \\ &\Leftrightarrow 2 = a.4 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

La forme canonique de P_1 est donc $y = \frac{1}{2}.(x-2)^2 - 5$. On développe l'expression pour obtenir sa forme générale :

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2}.(x-2)^2 - 5 \\ &= \frac{1}{2}.(x^2 - 4x + 4) - 5 \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 - 5 \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3}$

P_2 : Le sommet de la parabole est le point $(3;1)$. Ainsi, la forme canonique est

$y = a.(x-3)^2 + 1$.

Pour déterminer a, on utilise un point de la parabole :

$$\begin{aligned}(1;9) \in P_1 &\Leftrightarrow 9 = a.(1-3)^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 8 = a.4 \\ &\Leftrightarrow a = 2\end{aligned}$$

La forme canonique de P_2 est donc $y = 2.(x-3)^2 + 1$. On développe l'expression pour obtenir sa forme générale :

$$\begin{aligned}y &= 2.(x-3)^2 + 1 \\ &= 2.(x^2 - 6x + 9) + 1 \\ &= 2x^2 - 12x + 18 + 1 \\ &= 2x^2 - 12x + 19\end{aligned}$$

➔ $\boxed{f_2(x) = 2x^2 - 12x + 19}$

P_3 : : Le sommet de la parabole est le point $(-1;7)$. Ainsi, la forme canonique est

$y = a.(x+1)^2 + 7$.

Pour déterminer a, on utilise un point de la parabole :

$$\begin{aligned}(1;-5) \in P_1 &\Leftrightarrow -5 = a.(1+1)^2 + 7 \\ &\Leftrightarrow -12 = a.4 \\ &\Leftrightarrow a = -3\end{aligned}$$

La forme canonique de P_3 est donc $y = -3.(x+1)^2 + 7$. On développe l'expression pour obtenir sa forme générale :

$$\begin{aligned}y &= -3.(x+1)^2 + 7 \\ &= -3.(x^2 + 2x + 1) + 7 \\ &= -3x^2 - 6x - 3 + 7 \\ &= -3x^2 - 6x + 4\end{aligned}$$

➔ $\boxed{f_3(x) = -3x^2 - 6x + 4}$

6. Détermine u et v pour que les points $A(1;-2)$ et $B(2;1)$ appartiennent à la parabole $\mathcal{P} \equiv y = 3x^2 + 2ux + v$.

$$\begin{aligned} A(1;-2) \in P &\Leftrightarrow -2 = 3.1^2 + 2u.1 + v \\ &\Leftrightarrow -2 = 3 + 2u + v \\ &\Leftrightarrow -5 = 2u + v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(2;1) \in P &\Leftrightarrow 1 = 3.2^2 + 2u.2 + v \\ &\Leftrightarrow 1 = 12 + 4u + v \\ &\Leftrightarrow -11 = 4u + v \end{aligned}$$

On doit alors résoudre le système $\begin{cases} -5 = 2u + v \\ -11 = 4u + v \end{cases}$.

En isolant v dans la première équation, on a : $v = -5 - 2u$.

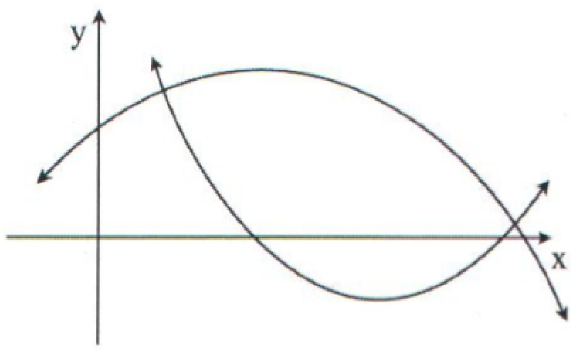
On remplace v par $-5-2u$ dans la 2e équation et on a :

$$\begin{aligned} -11 = 4u + (-5-2u) &\Leftrightarrow -11 = 4u - 5 - 2u \\ &\Leftrightarrow -6 = 2u \\ &\Leftrightarrow u = -3 \end{aligned}$$

On calcule alors v : $v = -5 - 2u = -5 - 2.(-3) = 1$

➔ $\boxed{u = -3 \text{ et } v = 1}$

7. Les graphiques de deux fonctions du second degré *f* et *g* sont représentés ci-dessous :



La fonction *f* est définie par $f(x) = (x-m)^2 + p$.

La fonction *g* est définie par $g(x) = -2(x-5)^2 + 100$.

Lequel des énoncés suivants est-il vrai ?

$\boxed{(1)\ m > 5 \text{ et } p < 100}$ car *g* est la parabole avec la concavité tournée vers le bas.

On choisit ce cas en comparant les coordonnées des deux sommets.

(2) $m > 5$ et $p > 100$ p

(3) $m < 5$ et $p < 100$

(4) $m < 5$ et $p > 100$

8. Détermine l'équation de la parabole passant par les points $A(1;4)$, $B(-2;-8)$ et $C(4;-20)$.

$$A(1;4)\in P \Leftrightarrow 4 = a.1^2 + b.1 + c$$
$$\Leftrightarrow 4 = a + b + c$$

$$B(-2;-8)\in P \Leftrightarrow -8 = a.(-2)^2 + b.(-2) + c$$
$$\Leftrightarrow -8 = 4a - 2b + c$$

$$C(4;-20)\in P \Leftrightarrow -20 = a.4^2 + b.4 + c$$
$$\Leftrightarrow -20 = 16a + 4b + c$$

On isole c dans la première équation : $c = 4 - a - b$.

On remplace ensuite c par $4 - a - b$ dans les deux autres équations :

$$-8 = 4a - 2b + 4 - a - b \Leftrightarrow -12 = 3a - 3b \Leftrightarrow -4 = a - b$$

et

$$-20 = 16a + 4b + 4 - a - b \Leftrightarrow -24 = 15a + 3b \Leftrightarrow -8 = 5a + b$$

On peut alors isoler a dans l'équation de gauche : $a = -4 + b$ et faire le remplacement dans l'équation de droite :

$$-8 = 5(-4 + b) + b \Leftrightarrow -8 = -20 + 5b + b$$
$$\Leftrightarrow 12 = 6b$$
$$\Leftrightarrow b = 2$$

On calcule alors a : $a = -4 + b = -4 + 2 = -2$ et c : $c = 4 - a - b = 4 - (-2) - 2 = 4$

Finalement,

➔ $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$

9. Détermine m et p pour que la parabole $\equiv y = -3x^2 + 5mx + p$ ait pour sommet le point $S(5;-3)$.

$m = 6$ et $p = -78$

10. On considère la famille de fonctions $f(x) = x^2 + 6x + m$.

(1) Détermine toutes les valeurs de m pour que le point $P(-1;-2)$ appartienne à G_f.

$m = 3$

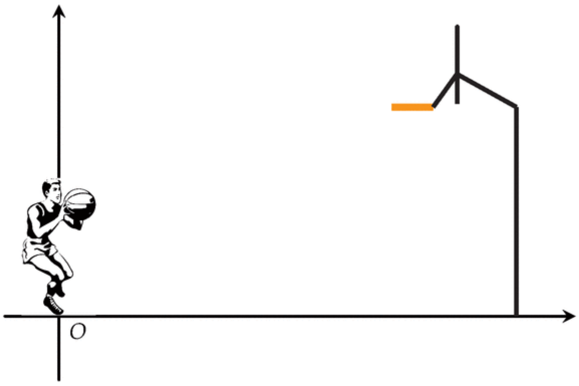
(2) Détermine m pour que l'ordonnée du sommet de la parabole soit -10.

$m = -1$

(3) Détermine m pour que la parabole n'ait qu'une seule racine.

$m = 9$

11. Lors d'un lancer franc au basket, le joueur se situe à environ 4,60 m du centre du panier, lui-même fixé à 3,05 m du sol.



Le joueur lance le ballon au niveau des épaules, c'est-à-dire à 1,65 m du sol. On admettra que, dans le repère choisi, la courbe décrite dans l'espace par le ballon est la parabole d'équation $y = -0,5x^2 - 1,95x + 1,65$, où x est la distance horizontale, en mètres, du ballon au joueur et y la hauteur, en mètres du ballon par rapport au sol.

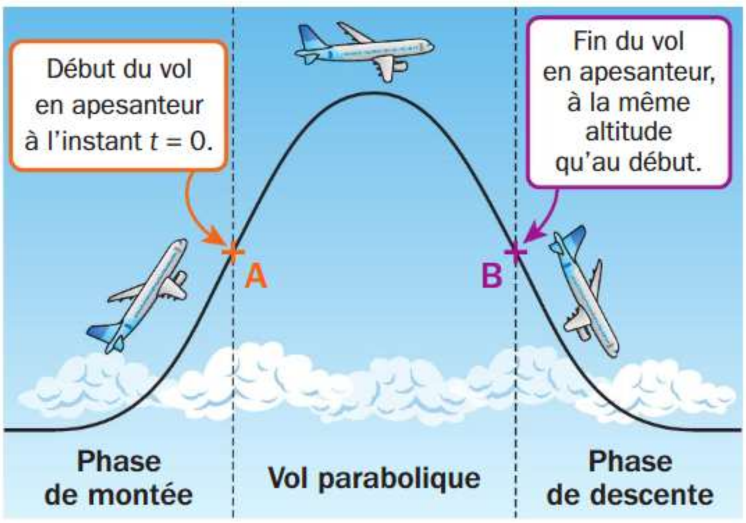
(1) Peut-on affirmer que le joueur a réussi son panier ?

Non, car en remplaçant x par 4,60, on trouve -17,9. Alors qu'on devrait obtenir la hauteur du panier, soit 3,05.

(2) Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon ?

3,55 m

12. En février 2018, l'astronaute français Thomas Pesquet a rejoint l'équipe de pilotes de l'Airbus ZERO-G. Cet avion permet de récréer les conditions de l'apesanteur en décrivant des paraboles grâce à l'alternance de phases de montées et de descentes.



L'altitude $f(t)$ de cet avion (en m) en fonction du temps t (en s) durant un vol parabolique de 22 secondes est donnée par : $f(t) = -\frac{900}{121}t^2 + \frac{1800}{11}t + 7600$ sur $I = [0;22]$.

Lors de ce vol parabolique, au bout de combien de temps l'avion atteindra-t-il son altitude maximale ?

Après 11 secondes