

SECOND DEGRÉ

Caractéristiques graphiques des fonctions
du second degré



C. SCOLAS

<https://bit.ly/41A78lm>

1. Détermine une équation de l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 6x + 1$.

$$AS \equiv x = \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{6}{4}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

2. Détermine les coordonnées du sommet de la parabole d'équation $y = -2x^2 - 6x - \frac{3}{2}$.

$$S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 36 - 12 = 24$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{-24}{-8} = 3$$

$$\Rightarrow S\left(-\frac{3}{2}; 3\right)$$

3. On considère la parabole d'équation $y = 2x^2 - 2x - \frac{5}{2}$.

- (1) Détermine sa forme canonique.

$$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$= 4 + 20$$

$$= 24$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{-24}{8} = -3$$

$$\Rightarrow y = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 3$$

- (2) Explique les manipulations à effectuer pour tracer cette parabole à partir du graphique de la fonction carrée.

On ajoute $\frac{1}{2}$ à l'abscisse de tout point.

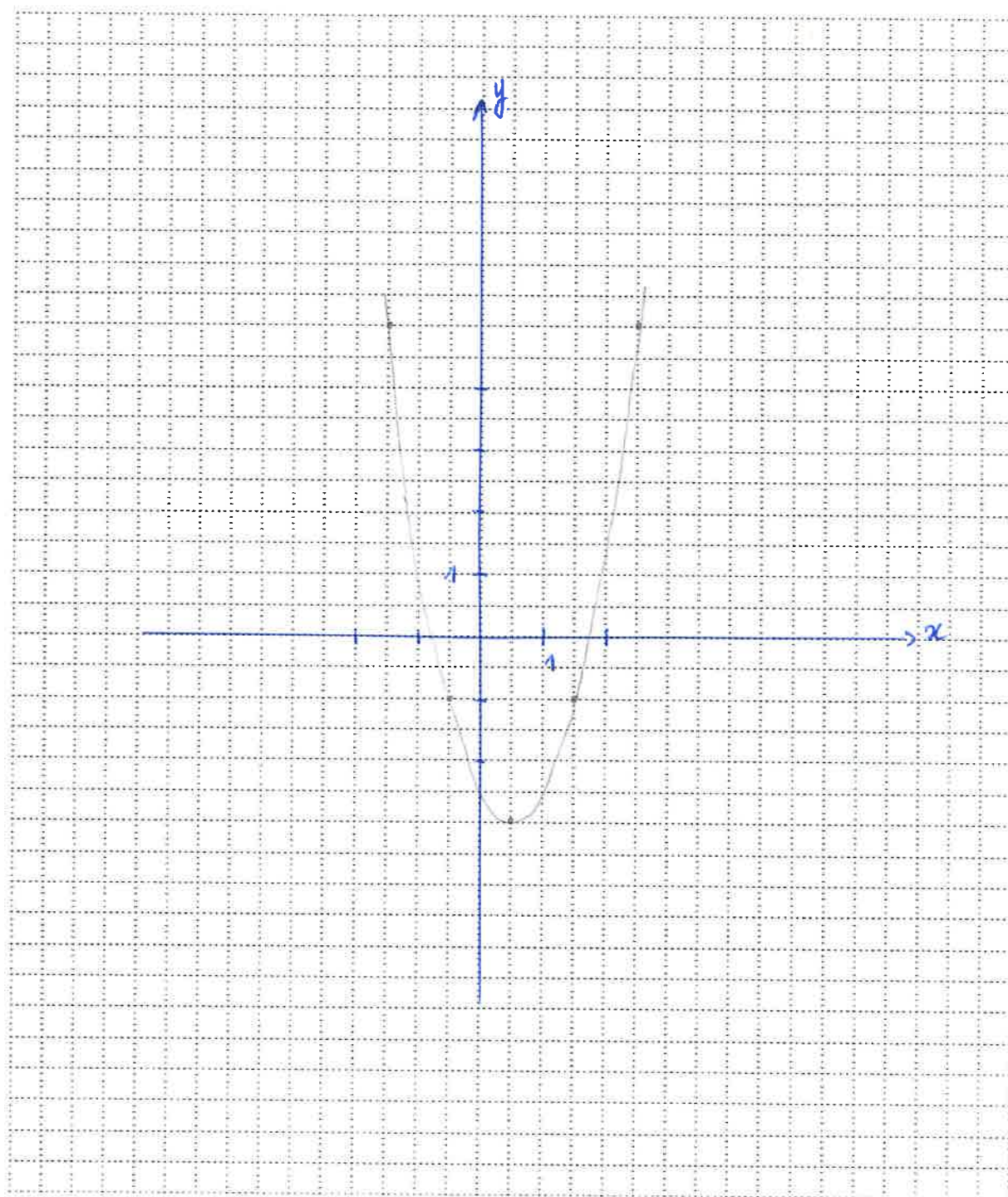
On multiplie chaque ordonnée par 2.

On soustrait 3 à l'ordonnée de tout point.

(3) Représente la parabole dans un repère orthonormé en utilisant les manipulations graphiques.

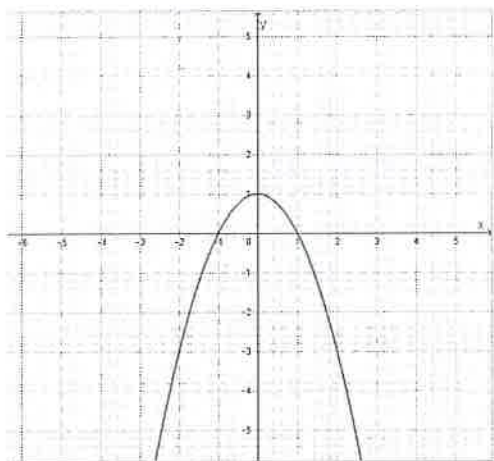
Place correctement les axes pour pouvoir représenter les 5 points de repère de la fonction carrée.

Choisis deux carreaux pour une unité.



4. Détermine les caractéristiques (coordonnées du sommet, équation de l'axe de symétrie, coordonnées des éventuels points d'intersection avec les axes) de chaque parabole représentée ci-dessous.

Etablis les tableaux de signe et de variation des fonctions correspondantes.



$$S(0; 1)$$

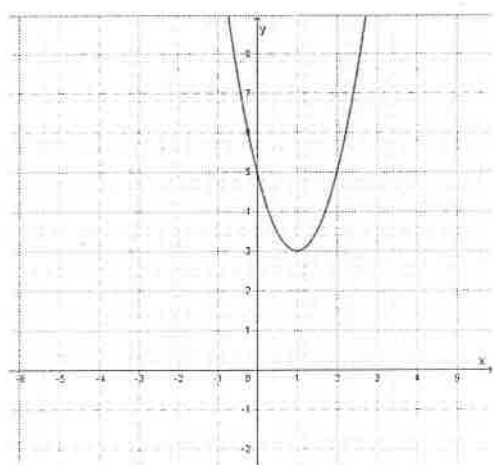
$$AS \equiv \alpha = 0$$

$$\cap O_x: (-1; 0) \text{ et } (1; 0)$$

$$\cap O_y: (0; 1)$$

$$TS: \begin{array}{c|ccc} \alpha & -1 & & 1 \\ \hline f(x) & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

$$TV: \begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline f(x) & \rightarrow \max_1 \searrow \end{array}$$



$$S(1; 3)$$

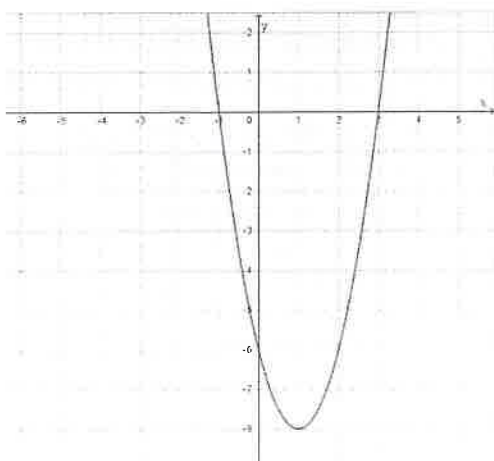
$$AS \equiv \alpha = 1$$

$$\cap O_x: \text{aucune intersection}$$

$$\cap O_y: (0; 5)$$

$$TS: \begin{array}{c|c} \alpha & \\ \hline f(x) & + \end{array}$$

$$TV: \begin{array}{c|c} \alpha & 1 \\ \hline f(x) & \searrow \min_3 \rightarrow \end{array}$$



$$S(1; -8)$$

$$AS \equiv \alpha = 1$$

$$\cap O_x: (-1; 0) \text{ et } (3; 0)$$

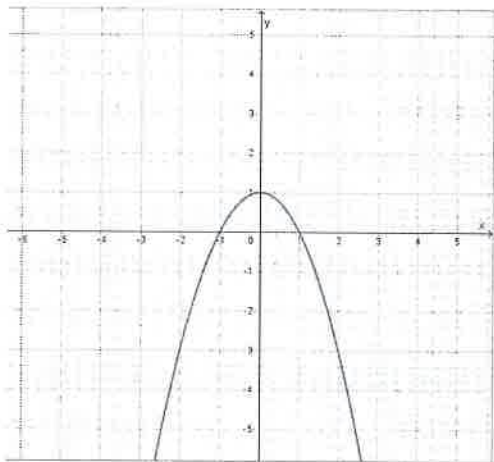
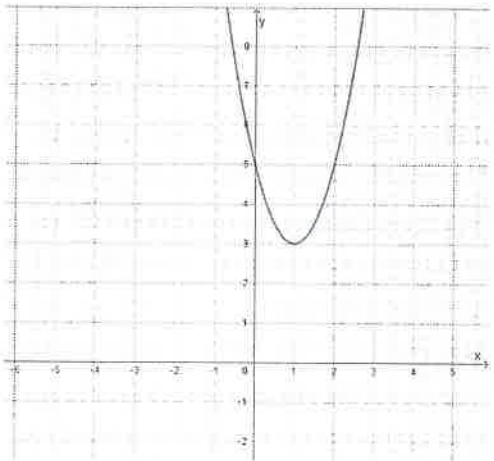
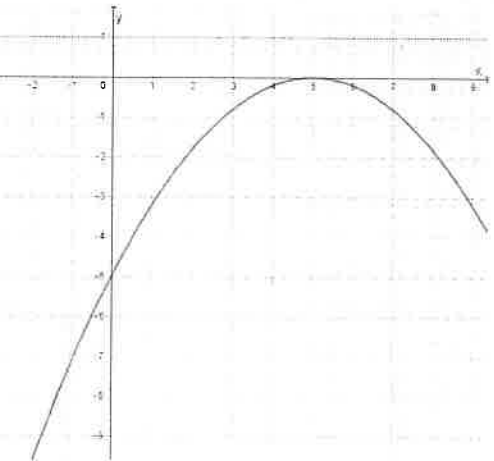
$$\cap O_y: (0; -6)$$

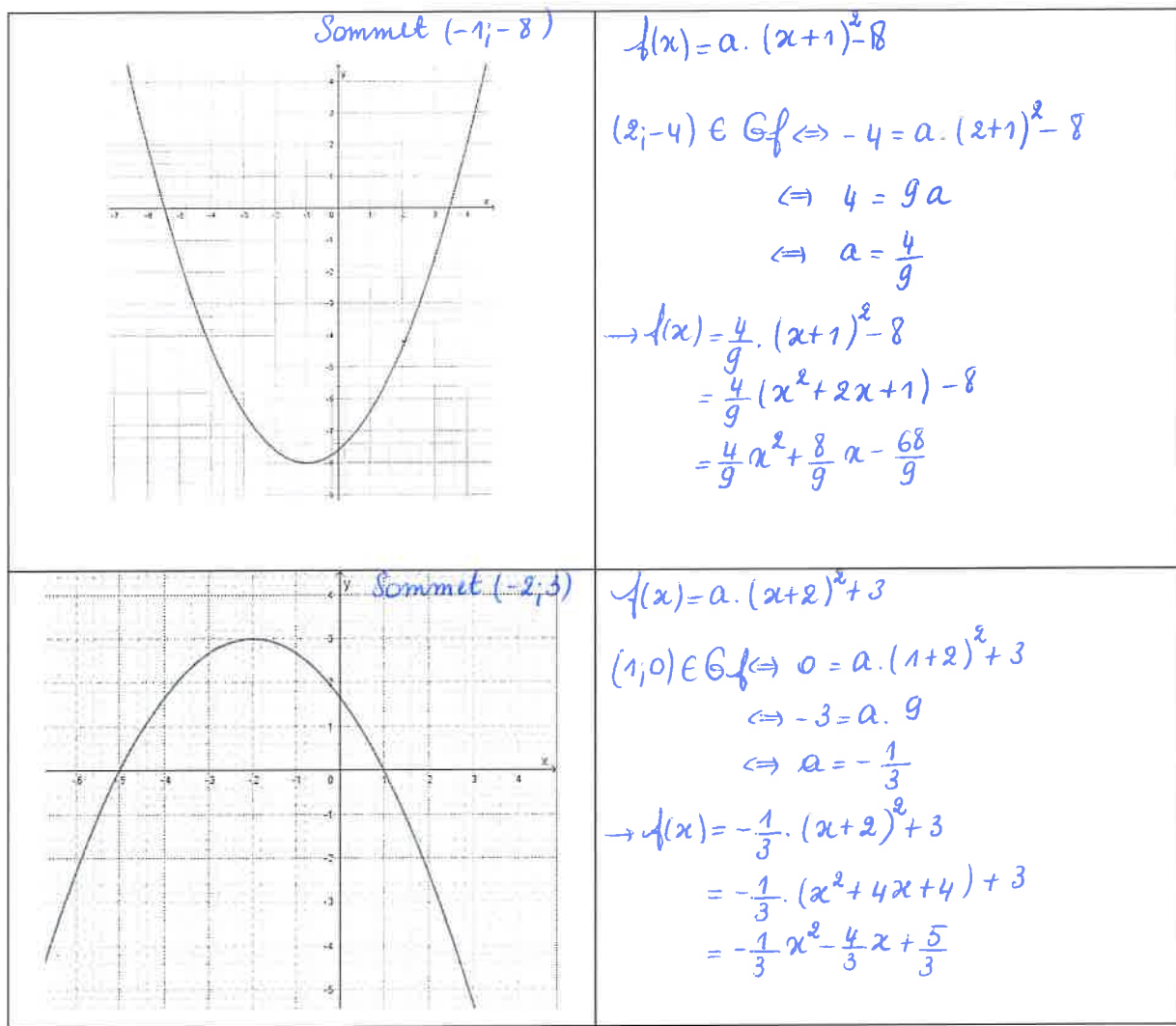
$$TS: \begin{array}{c|ccc} \alpha & -1 & & 3 \\ \hline f(x) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$TV: \begin{array}{c|c} \alpha & 1 \\ \hline f(x) & \searrow \min_{-8} \rightarrow \end{array}$$

5. Détermine une expression analytique de chaque fonction du second degré, sous la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Sommet: (0;1) 	$f(x) = a \cdot (x-0)^2 + 1$ $= a \cdot x^2 + 1$ $(2; -3) \in Gf \Leftrightarrow -3 = a \cdot 2^2 + 1$ $\Leftrightarrow -3 = 4a + 1$ $\Leftrightarrow -4 = 4a$ $\Leftrightarrow a = -1$ $\rightarrow f(x) = -x^2 + 1$
Sommet (1;3) 	$f(x) = a \cdot (x-1)^2 + 3$ $(2; 5) \in Gf \Leftrightarrow 5 = a \cdot (2-1)^2 + 3$ $\Leftrightarrow 2 = a \cdot 1$ $\Leftrightarrow a = 2$ $\rightarrow f(x) = 2 \cdot (x-1)^2 + 3$ $= 2 \cdot (x^2 - 2x + 1) + 3$ $= 2x^2 - 4x + 2 + 3$ $= 2x^2 - 4x + 5$
Sommet (5;0) 	$f(x) = a \cdot (x-5)^2 + 0$ $= a \cdot (x-5)^2$ $(0; -5) \in Gf \Leftrightarrow -5 = a \cdot (0-5)^2$ $\Leftrightarrow -5 = a \cdot 25$ $\Leftrightarrow a = \frac{-5}{25}$ $\Leftrightarrow a = -\frac{1}{5}$ $\rightarrow f(x) = -\frac{1}{5} \cdot (x-5)^2$ $= -\frac{1}{5} \cdot (x^2 - 10x + 25)$ $= -\frac{1}{5}x^2 + 2x - 5$



6. On considère la famille de fonctions $f(x) = mx^2 + 4x + 3$.

(1) Détermine la valeur de m pour que le point $(2; 19)$ appartienne à G_f .

$$(2; 19) \in G_f \Leftrightarrow 19 = m \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 3$$

$$\Leftrightarrow 19 = 4m + 8 + 3$$

$$\Leftrightarrow 8 = 4m$$

$$\Leftrightarrow m = 2$$

(2) Détermine la valeur de m pour que la fonction ne possède qu'une seule racine.

La fonction ne possède qu'une seule racine si $\Delta = 0$.

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot m \cdot 3$$

$$= 16 - 12m$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 16 - 12m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{16}{12}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$$

7. Un congélateur défectueux n'arrive pas à maintenir la température constante. On y place un pot d'eau dont on mesure la température à intervalles réguliers. On constate que la température de l'eau ou de la glace (en degrés Celsius) est donnée, t heures après que le récipient ait été déposé au congélateur, par la fonction $f(t) = 2t^2 - 14t + 20$ où $t \in [0; 6]$.

- (1) Quelle est la température de l'eau au moment où on place le récipient au congélateur ?

$$f(0) = 2 \cdot 0^2 - 14 \cdot 0 + 20 \\ = 20$$

$\Rightarrow$ La température initiale de l'eau est de 20°C .

- (2) Combien de temps l'eau met-elle à se transformer en glace ?

L'eau se transforme en glace au moment où $f(t) = 0$.

$$2t^2 - 14t + 20 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{14 \pm 6}{4} \begin{matrix} / 2 \\ \end{matrix}$$

$$\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 20$$

$$= 196 - 160 = 36$$

$\Rightarrow$ L'eau se transforme en glace après 2h.

- (3) Après combien de temps la glace commence-t-elle à fondre ?

L'eau commence à fondre 5h après l'avoir placée au congélateur.

- (4) Quelle est la température minimale atteinte par la glace? Combien de temps après que le pot d'eau ait été placé au congélateur la glace atteint-elle cette température minimale?

$$-\frac{b}{2a} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{-36}{8} = -\frac{9}{2}$$

$\Rightarrow$ La température minimale est atteinte après 3,5 heures (abscisse du sommet) et elle est de $-4,5^\circ\text{C}$ (ordonnée du sommet).

8. Détermine toutes les valeurs de m pour que la parabole d'équation $y = 2x^2 + 3mx + 5$

admette pour sommet un point d'ordonnée $\frac{1}{2}$. Détermine ensuite l'abscisse du(des)

sommet(s).

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta = (3m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5$$

$$= 9m^2 - 40$$

$$\Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-9m^2 + 40}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -9m^2 + 40 = 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 2$$

$$\text{Si } m = 2, \quad -\frac{b}{2a} = \frac{-3m}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Si } m = -2, \quad -\frac{b}{2a} = \frac{-3m}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

9. Lors d'un naufrage, le capitaine d'un bateau tire une fusée de détresse verticalement à l'instant $t=0$. Cette fusée s'élève suivant la loi $y(t)=39,2t-4,9t^2$ où $y(t)$ désigne l'altitude en mètres à l'instant t , en secondes.

a. Détermine la hauteur maximale que sa fusée atteindra.

↳ ordonnée du sommet

$$\Delta = 39,2^2 - 4 \cdot (-4,9) \cdot 0$$

$$= 1536,64$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{-1536,64}{4 \cdot (-4,9)} = 78,4$$

→ la hauteur maximale atteinte par la fusée est de 78,4 m.

b. Combien de temps faudra-t-il pour que la fusée atteigne cette hauteur maximale ?

↳ abscisse du sommet

$$-\frac{b}{2a} = \frac{-39,2}{2 \cdot (-4,9)} = 4$$

→ la hauteur maximale est atteinte après 4 secondes.

c. Détermine après combien de temps la fusée retombera au sol.

↳ on cherche la racine positive de f .

$$t_{1,2} = \frac{-39,2 \pm 39,2}{2 \cdot (-4,9)} \quad \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow 8 \end{matrix}$$

→ la fusée retombera au sol 8 secondes après son lancement.

10. Détermine une équation de la parabole passant par les points $A(1;-3)$, $B(2;-4)$ et

$C(-3;-19)$. Indique bien toutes les étapes.

$$A \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -3 = a + b + c \quad (1)$$

$$B \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -4 = 4a + 2b + c \quad (2)$$

$$C \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -19 = 9a - 3b + c \quad (3)$$

On isole c dans l'équation (1): $c = -3 - a - b$

On remplace c dans l'équation (2): $-4 = 4a + 2b - 3 - a - b$
 $-1 = 3a + b$

On remplace c dans l'équation (3): $-19 = 9a - 3b - 3 - a - b$
 $-16 = 8a - 4b$
 $-4 = 2a - b$

On isole b dans $-1 = 3a + b$: $b = -1 - 3a$

et on remplace b dans $-4 = 2a - b$: $-4 = 2a - (-1 - 3a)$
 $-4 = 2a + 1 + 3a$
 $-5 = 5a$
 $a = -1$

$$\text{Comme } a = -1, b = -1 - 3a = -1 - 3 \cdot (-1) = 2$$

$$\text{et } c = -3 - a - b = -3 - (-1) - 2 = -4$$

$$\rightarrow \mathcal{P} \equiv y = -x^2 + 2x - 4$$

11. Détermine une équation de la parabole passant par les points $A(2; -8)$, $B(-1; 6)$ et $C(4; -15)$. Indique bien toutes les étapes.

$$A \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -8 = 4a + 2b + c \quad (1)$$

$$B \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 6 = a - b + c \quad (2)$$

$$C \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -15 = 16a + 4b + c \quad (3)$$

$$\text{On isole } c \text{ dans l'équation (1): } c = -8 - 4a - 2b$$

$$\text{On remplace } c \text{ dans l'équation (2): } 6 = a - b - 8 - 4a - 2b$$

$$14 = -3a - 3b \rightarrow a = -\frac{14}{3} - b$$

$$\text{On remplace } c \text{ dans l'équation (3): } -15 = 16a + 4b - 8 - 4a - 2b$$

$$-7 = 12a + 2b$$

$$\text{On remplace } a \text{ par } -\frac{14}{3} - b \text{ dans cette dernière équation:}$$

$$-7 = 12 \cdot \left(-\frac{14}{3} - b\right) + 2b$$

$$\Leftrightarrow -7 = -56 - 12b + 2b$$

$$\Leftrightarrow 49 = -10b$$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{49}{10}$$

$$\text{Ainsi, } a = -\frac{14}{3} - \left(-\frac{49}{10}\right) = -\frac{7}{30} \text{ et } c = -8 - 4 \cdot \left(-\frac{7}{30}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{49}{10}\right)$$

$$= \frac{13}{15}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P} \equiv y = -\frac{7}{30}x^2 - \frac{49}{10}x + \frac{13}{15}$$