SECOND DEGRÉ

Signe des trinômes du second degré

C. SCOLAS

https://bit.ly/41A78lm

1. Etablis le tableau de signe des expressions suivantes :

(1) $3x^2-2x-8$

Racines : $3x^2-2x-8=0$

$\Delta=(-2)^2-4.3.(-8)$

$=100$

$x_{1,2}=\frac{2\pm10}{6}$ ↗ 2 ↘ $-\frac{4}{3}$

x		$-\frac{4}{3}$		2	
$3x^2-2x-8$	+	0	−	0	+

(2) $-4x^2+2x$

Racines : $-4x^2+2x=0$

$-2x.(2x-1)=0$

$x=0$ $\quad$ $x=\frac{1}{2}$

x		0		$1/2$	
$-4x^2+2x$	−	0	+	0	−

(3) $-6x^2+4x-\frac{2}{3}$

Racines : $-6x^2+4x-\frac{2}{3}=0$

$\Delta=4^2-4.(-6).(-\frac{2}{3})$

$=16-16$

$=0$

$x_1=\frac{-4}{-12}=\frac{1}{3}$

x		$\frac{1}{3}$	
$-6x^2+4x-\frac{2}{3}$	−	0	−

(4) $\frac{3x+5}{5x^2-11x+2}$

Racines (N) $3x+5=0$

$x=-\frac{5}{3}$

(D) $5x^2-11x+2=0$

$\Delta=(-11)^2-4.5.2$

$=121-40$

$=81$

$x_{1,2}=\frac{11\pm9}{10}$ ↗ 2 ↘ $\frac{1}{5}$

x		$-\frac{5}{3}$		$\frac{1}{5}$		2	
$3x+5$	−	0	+	+	+	+	+
$5x^2-11x+2$	+	+	+	0	−	0	+
$\frac{3x+5}{5x^2-11x+2}$	−	0	+	∄	−	0	+

(5) $\dfrac{-2x}{x^2-9}$

Racines : (N) $-2x=0$

$x=0$

(D) $x^2-9=0$

$x^2=9$

$x=\pm 3$

x		-3		0		3	
$-2x$	+	+	+	0	−	−	−
x^2-9	+	0	−	−	−	0	+
$\dfrac{-2x}{x^2-9}$	+	$\nexists$	−	0	+	$\nexists$	−

(6) $(-3x-3).(x^2-5x+6)$

Racines : $(-3x-3).(x^2-5x+6)=0$

$x=-1$

$\Delta=(-5)^2-4.1.6$

$=1$

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm 1}{2}$ $\begin{cases}3\\2\end{cases}$

x		-1		2		3	
$-3x-3$	+	0	−	−	−	−	−
x^2-5x+6	+	+	+	0	−	0	+
$\dfrac{-3x-3}{x^2-5x+6}$	+	0	−	0	+	0	−

2. Résous les inéquations suivantes :

(1) $x^2-17x+70<0$

Racines : $x^2-17x+70=0$

$\Delta=(-17)^2-4.1.70$

$=49$

$x_{1,2}=\dfrac{17\pm 7}{2}$ $\begin{cases}12\\5\end{cases}$

x		5		12	
$x^2-17x+70$	+	0	−	0	+

$S=\leftarrow;5[\cup]12;\rightarrow$

(2) $x(x+4)<3+3(9+x)$

$\Leftrightarrow x^2+4x<3+27+3x$

$\Leftrightarrow x^2+x-30<0$

Racines : $x^2+x-30=0$

$\Delta=1^2-4.1.(-30)$

$=121$

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm 11}{2}$ $\begin{cases}5\\-6\end{cases}$

x		-6		5	
x^2+x-30	+	0	−	0	+

$S=]-6;5[$

(3) $(x+3)^2\geq 2.(x^2+7)$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9\geq 2x^2+14$

$\Leftrightarrow -x^2+6x-5\geq 0$

Racines : $-x^2+6x-5=0$

$\Delta=6^2-4.(-1).(-5)$

$=16$

$x_{1,2}=\dfrac{-6\pm 4}{-2}$ $\begin{cases}1\\5\end{cases}$

x		1		5	
$-x^2+6x-5$	−	0	+	0	−

$S=[1;5]$

(4) $(x+3)^2 \leq 6(x+15)$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9 \leq 6x+90$

$\Leftrightarrow x^2-81 \leq 0$

Racines : $x^2-81=0$

$\Leftrightarrow x^2=81$

$\Leftrightarrow x=\pm 9$

x		-9		9	
x^2-81	$+$	0	$-$	0	$+$

$S=[-9;9]$

(5) $\dfrac{x}{x-2} \geq \dfrac{3}{x-4}$ CE1: $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ CE2: $x-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x-2} - \dfrac{3}{x-4} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x.(x-4)}{(x-2)(x-4)} - \dfrac{3.(x-2)}{(x-4)(x-2)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x-3x+6}{(x-2).(x-4)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-7x+6}{(x-2).(x-4)} \geq 0$

Racines (N) $x^2-7x+6=0$

$\Delta=(-7)^2-4.1.6=25$

$x_{1,2}=\dfrac{7\pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} 6 \\ 1 \end{array} \right.$

(D) $(x-2).(x-4)=0$

$x=2 \qquad x=4$

x		1		2		4		6	
x^2-7x+6	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x^2-7x+6}{(x-2)(x-4)}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$S = \leftarrow;1] \cup]2;4[\cup [6;\rightarrow$

(6) $\dfrac{x-1}{x} \leq \dfrac{2}{x+2}$ CE1: $x \neq 0$ CE2: $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x} - \dfrac{2}{x+2} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1).(x+2)}{x.(x+2)} - \dfrac{2.x}{(x+2).x} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x-x-2}{x.(x+2)} - \dfrac{2x}{(x+2).x} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-2}{(x+2).x} \leq 0$

Racines : (N) $x^2-x-2=0$

$\Delta=(-1)^2-4.1.(-2)=9$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm 3}{2} \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array} \right.$

(D) $(x+2).x=0$

$x=-2 \qquad x=0$

x		-2		-1		0		2	
x^2-x-2	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x^2-x-2}{(x+2).x}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$S=]-2;-1] \cup]0;2]$

3. Pose les conditions d'existence et détermine le domaine de définition des fonctions suivantes :

(1) $f(x)=\sqrt{3x^2-5x+2}$

CE: $3x^2-5x+2 \geq 0$

Racines : $3x^2-5x+2=0$

$\Delta = (-5)^2-4.3.2=1$

$x_{1,2}=\dfrac{5\pm 1}{6}$ $\begin{cases} 1 \\ \frac{2}{3} \end{cases}$

x		$\frac{2}{3}$		1	
$3x^2-5x+2$	+	0	−	0	+

$\Rightarrow \text{dom} f = \leftarrow ; \frac{2}{3}] \cup [1 ; \rightarrow$

(2) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{-x^2+2x+5}$

CE: $-x^2+2x+5 \neq 0$

$\Delta = 2^2-4.(-1).5=24$

$x_{1,2}=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{6}}{-2}=1\pm\sqrt{6}$

$\Rightarrow \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1-\sqrt{6} ; 1+\sqrt{6}\}$

(3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x^2-4x+5}{x^2+3x}}$

CE: $\dfrac{-x^2-4x+5}{x^2+3x} \geq 0$

Racines : (N) $-x^2-4x+5=0$

$\Delta = (-4)^2-4.(-1).5$

$= 36$

$x_{1,2}=\dfrac{4\pm 6}{-2}$ $\begin{cases} -5 \\ 1 \end{cases}$

(D) $x^2+3x=0$

$x.(x+3)=0$

$x=0 \quad x=-3$

x		-5		-3		0		1	
$-x^2-4x+5$	−	0	+	+	+	+	+	0	−
x^2+3x	+	+	+	0	−	0	+	+	+
$\dfrac{-x^2-4x+5}{x^2+3x}$	−	0	+	$\nexists$	−	$\nexists$	+	0	−

$\rightarrow \text{dom} f = [-5 ; -3[\cup]0 ; 1]$

(4) $f(x)=\dfrac{-1}{x^2-3x+2}$

CE: $x^2-3x+2=0$

$\Delta=(-3)^2-4.1.2=1$

$x_{1,2}=\dfrac{3\pm1}{2}$ $\left\langle\begin{array}{l}2\\1\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ dom $f=\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$

(5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2-x-6}}{\sqrt{3-x}}$

CE1: $2x^2-x-6\geq0$

Racines : $2x^2-x-6=0$

$\Delta=(-1)^2-4.2.(-6)$

$=49$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm7}{4}$ $\left\langle\begin{array}{l}2\\-\frac{3}{2}\end{array}\right.$

x		$-\frac{3}{2}$		2	
$2x^2-x-6$	+	0	−	0	+

CE2 : $3-x>0$

$-x>-3$

$x<3$

$\Rightarrow$ dom $f=\leftarrow;-\frac{3}{2}]\cup[2;3[$

(6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2+5x-3}}{\sqrt{5x-1}}$

CE1: $2x^2+5x-3\geq0$

Racines : $2x^2+5x-3=0$

$\Delta=5^2-4.2.(-3)=49$

$x_{1,2}=\dfrac{-5\pm7}{4}$ $\left\langle\begin{array}{l}1/2\\-3\end{array}\right.$

x		-3		$1/2$	
$2x^2+5x-3$	+	0	−	0	+

CE2 : $5x-1>0$

$5x>1$

$x>\frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ dom $f=[\frac{1}{2};\rightarrow$

(7) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-3}}$

CE: $\dfrac{x^2-4}{x-3} \geq 0$

Racines : (N) $x^2-4=0$

$x^2=4$

$x=\pm\sqrt{4}$

$x=\pm 2$

(D) $x-3=0$

$x=3$

x		-2		2		3	
x^2-4	+	0	−	0	+	+	+
$x-3$	−	−	−	−	−	0	+
$\dfrac{x^2-4}{x-3}$	−	0	+	0	−	$\nexists$	+

$\Rightarrow$ dom $f = [-2;2] \cup]3;\rightarrow$