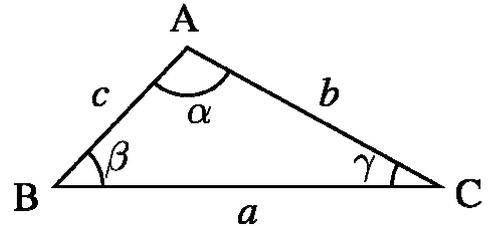


## C. Trigonométrie dans le triangle quelconque

### 1. Notations

Notations usuelles dans un triangle quelconque :

- le côté  $[BC]$  situé en face du sommet  $A$  a une longueur notée  $a$  (lettre minuscule associée à la lettre majuscule caractérisant le sommet) ;
- le côté  $[AC]$  situé en face du sommet  $B$  a une longueur notée  $b$  ;
- le côté  $[AB]$  situé en face du sommet  $C$  a une longueur notée  $c$  ;
- l'angle de sommet  $A$  est noté  $\alpha$  (alpha) ;
- l'angle de sommet  $B$  est noté  $\beta$  (bêta) ;
- l'angle de sommet  $C$  est noté  $\gamma$  (gamma).



### 2. Formules

#### (1) Loi des cosinus

Enoncé :

.....

.....

.....

.....

.....

Démonstration :

## **(2) Loi des sinus**

Enoncé :

.....

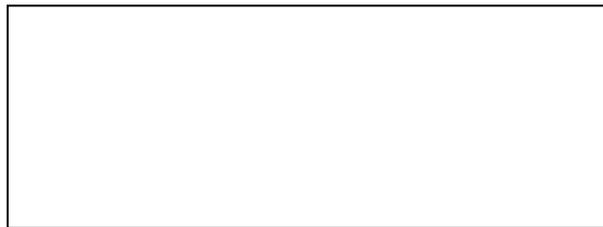
.....



Démonstration :

### (3) Aire d'un triangle

L'aire de tout triangle égale la moitié du produit des longueurs des deux côtés par le sinus de l'angle formé par ces deux côtés.



Démonstration :

#### 4. Remarques

Considérons le triangle  $ABC$  pour lequel  $\alpha = 36^\circ$ ,  $b = 5$  et  $c = 7$ .

Utilisons la loi des cosinus pour calculer  $a$  :

Pour déterminer l'angle  $\gamma$ ,

- utilisons la loi des sinus :

- utilisons la loi des cosinus :

*D'où vient cette différence ?*

Pour un cosinus négatif, la calculatrice nous donne un angle du deuxième quadrant. C'est la seule mesure possible puisque, dans un triangle, chaque angle est inférieur à  $180^\circ$ .

Par contre, pour un sinus positif, la calculatrice donne un angle situé dans le premier quadrant.

Ce n'est pourtant pas la seule mesure : un angle du deuxième quadrant a également un sinus positif.

Ainsi, dans notre exemple,  $80,83^\circ$  et  $180^\circ - 80,83^\circ$  (angles supplémentaires) sont deux réponses possibles pour  $\gamma$ .

Nous savons que, dans un triangle, au plus grand côté est opposé le plus grand angle.

Ainsi,  $180^\circ - 80,83^\circ = 99,17^\circ$  est la valeur de  $\gamma$ .

Pour éviter de calculer deux valeurs pour un angle et de devoir effectuer un choix, nous utiliserons, autant que possible, la **loi des cosinus**.



## 5. Exercices

1. Résoudre un triangle, c'est déterminer la longueur des trois côtés et l'amplitude des trois angles.

Si on connaît...		...on utilise...
2 angles et 1 côté	ACA	la somme des 3 angles d'un triangle et la loi des sinus
2 côtés et l'angle formé par ces 2 côtés	CAC	la formule des cosinus
3 côtés	CCC	la formule des cosinus

Résous les triangles suivants dans lesquels on te donne :

(1)  $\beta = 123^\circ$      $\gamma = 24,3^\circ$      $a = 17,3$

(2)  $\alpha = 54^\circ$      $b = 167$      $c = 145$

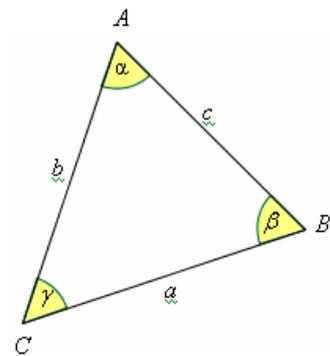
(3)  $\alpha = 67^\circ$      $a = 100$      $c = 125$

(4)  $\alpha = 48^\circ$      $\gamma = 57^\circ$      $b = 47$

(5)  $\alpha = 103,4^\circ$      $\gamma = 27,2^\circ$      $b = 38,84$

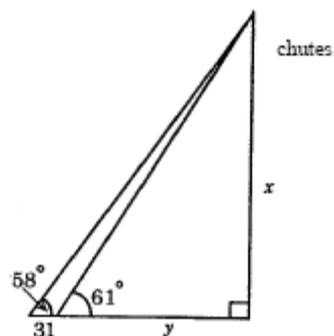
(6)  $a = \sqrt{2}$      $b = 2$      $c = 1 + \sqrt{3}$

(7)  $a = 10$      $b = 15$      $c = 20$



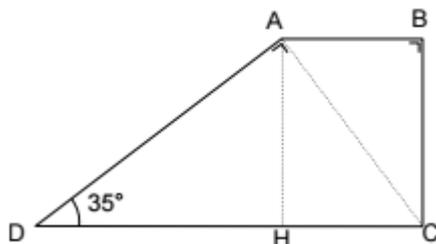
2. Calcule l'aire du triangle  $ABC$  lorsque  $a = 14$ ,  $b = 10$  et  $c = 6$ .

3. Les plus hautes chutes d'eau au Canada s'appellent *Della Falls* et sont situées sur l'île Vancouver. Une personne se tenant au même niveau que celui de la base des chutes aperçoit le sommet des chutes à un angle d'élévation de  $58^\circ$ . Si elle se rapproche de 31 m de la base, l'angle d'élévation devient  $61^\circ$ . Quelle est la hauteur des chutes Della ?

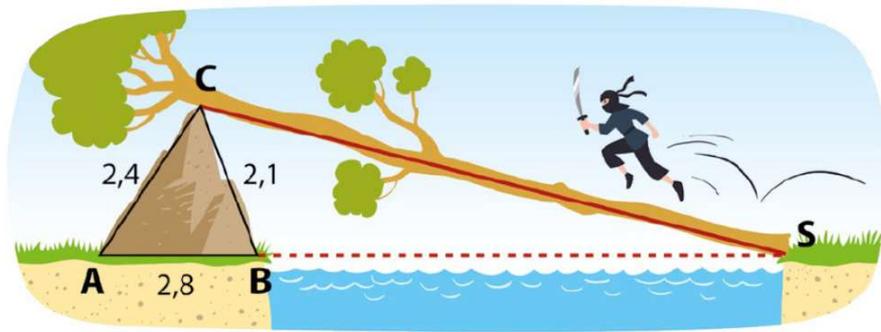


4. Un des angles d'un trapèze rectangle  $ABCD$  vaut  $35^\circ$ . La plus petite diagonale vaut 7 cm et est perpendiculaire au côté oblique. Calcule le périmètre de ce trapèze.

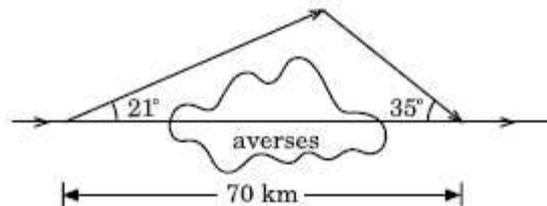
(Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte, ULg, Septembre 2013)



5. Dans un jeu vidéo, Super Ninja court pour échapper à ses ennemis. Il arrive au bord d'une rivière de 7 mètres de large et aperçoit un rocher triangulaire sur l'autre rive. Vite ! Super Ninja doit couper un arbre pour traverser la rivière en le posant sur la pointe du rocher. Mais quelle longueur doit avoir au minimum son arbre ? Heureusement que Super Ninja connaît les dimensions (en mètres) du rocher...



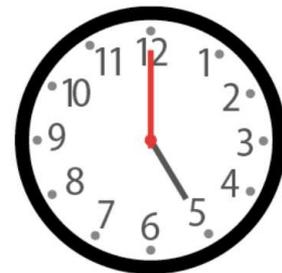
6. Imagine que tu es pilote d'un avion d'une compagnie aérienne. Tu juges nécessaire de contourner une zone d'averses orageuses. Tu effectues un virage formant un angle de  $21^\circ$  avec ta trajectoire initiale. Tu voles pendant un certain temps. Tu effectues à nouveau un virage et tu interceptes ta trajectoire initiale à un angle de  $35^\circ$ , 70 km après l'avoir quittée. Quelle distance supplémentaire as-tu dû parcourir en raison de cette déviation ?



Pour chercher :



- Une horloge indique exactement 5 :00. La grande aiguille mesure 20 cm et la petite 12 cm.  
Calcule la distance en cm entre les extrémités des deux aiguilles.



Sol : 30,98 cm

- Construis un triangle équilatéral  $ABC$  de 16 cm de côté.  
Marque  $P$  et  $Q$  les milieux respectifs de  $[AB]$  et  $[BC]$ .  
Place, sur le segment  $[AC]$ , les points  $R$  et  $S$  tels que  $\overline{AR} = \overline{SC} = 4$  cm.  
Trace le segment  $[RQ]$ .  
Construis  $M$  et  $N$ , les projections orthogonales de  $P$  et  $S$  sur  $[RQ]$ .

Trace les segments  $[PM]$  et  $[SN]$ .

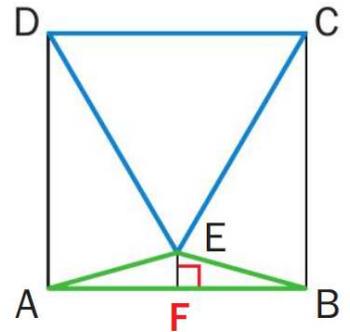
Le triangle  $ABC$  est alors partagé en 4 parties.

Les découper, puis les assembler de façon à former un carré. Mais est-ce un vrai carré ?...

3. Sur la figure ci-contre,  $ABCD$  est un carré de 1 cm de côté et  $DCE$  est un triangle équilatéral.  $EF$  est une hauteur du triangle  $ABE$ .

Quelle est la valeur exacte de  $\tan 15^\circ$  ?

Sol :  $2 - \sqrt{3}$



4. Un bateau avance à 21 km/h. Il veut accoster au point d'arrivée  $A$ .

Du fait de la présence de récifs, il devra passer par le point  $B$  pour se rendre à destination. A 10 heures, le bateau est au point  $D$  et constate que le point  $A$  se trouve à  $60^\circ$  à l'ouest par rapport à son cap.

A 10h20, le bateau arrive en  $B$ . Juste avant de virer vers son but, le capitaine constate que le point  $A$  se trouve à  $105^\circ$  à l'ouest par rapport à son cap.

A quelle heure le bateau arrivera-t-il en  $A$  ?

