B. Taux de variation

Considérons une bactérie dont la croissance est définie par la fonction

$$f(t) = (1+t)^2$$

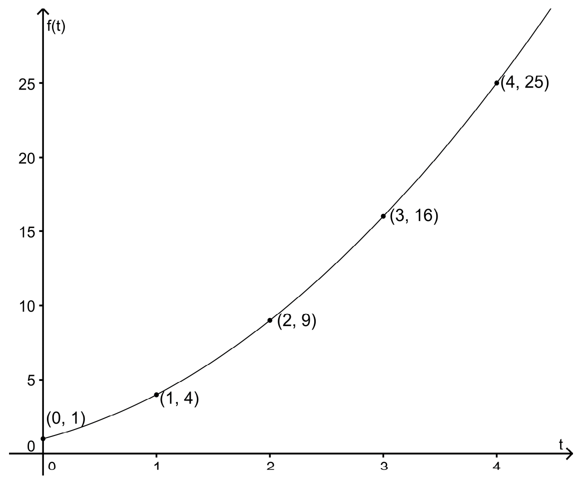
où | t représente le temps, en minutes,
| $f(t)$ représente le nombre de bactéries au temps t.

Initialement $(t=0)$, le nombre de bactéries est $f(0) = (1+0)^2 = 1$.

Après une minute $(t=1)$, le nombre de bactéries devient $f(1) = (1+1)^2 = 4$.

Pour les quatre premières minutes, on obtient :

t (min.)	$f(t)$ (nombre de bactéries)
0	1
1	4
2	9
3	16
4	25



On remarque que la croissance des bactéries est de plus en plus rapide.
La population double, triple ou quadruple très rapidement.

Ainsi,
de $t=0$ à $t=1$, l'accroissement des bactéries est de $4-1=3$,
de $t=1$ à $t=3$, l'accroissement des bactéries est de $16-4=12$,
de $t=a$ à $t=b$, l'accroissement des bactéries sera de $f(b)-f(a)$.

Lorsqu'on étudie la croissance d'une fonction, on s'intéresse souvent à la vitesse à laquelle s'effectue cette croissance sur des intervalles donnés. On s'intéresse en fait à ce qu'on appelle le *taux de variation moyen* de la fonction.

Le taux de variation moyen des bactéries par rapport au temps

de $t=0$ à $t=1$ est de $\dfrac{4-1}{1-0}=3$ bactéries/minute,

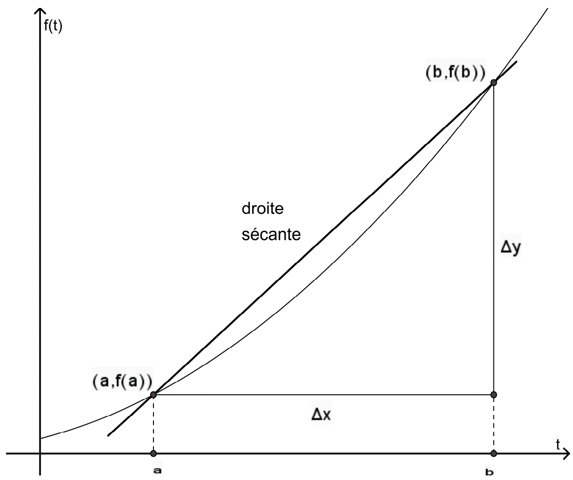
de $t=1$ à $t=3$ est de $\dfrac{16-4}{3-1}=6$ bactéries/minute.

Le **taux de variation moyen** d'une fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ de son domaine est donné par

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

<u>Géométriquement</u>, lorsqu'on calcule le taux de variation moyen d'une fonction sur l'intervalle $[a;b]$, on calcule une *pente*.

En fait, cette quantité correspond à la *pente de la droite sécante* passant par les points $(a;f(a))$ et $(b;f(b))$.



<u>Exercice</u> : Un camion de la compagnie ACME quitte l'entrepôt pour effectuer une livraison. La distance (en kilomètres) parcourue par le camion après avoir roulé *t* heures est donnée par l'équation

$$s(t)=15t^2 \qquad 0\le t\le 4$$

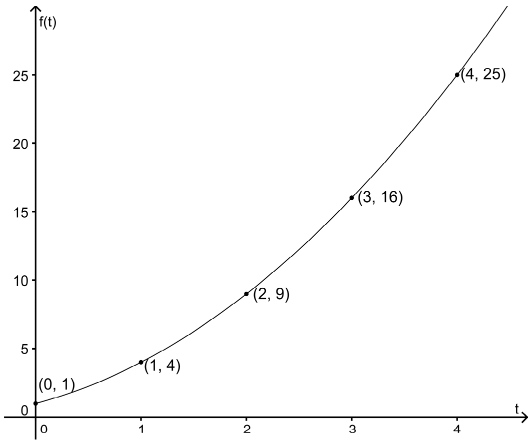
Calcule le taux de variation moyen de la distance parcourue par le camion sur les intervalles de temps indiqués.

(1) $[0;4]$

(2) $[0;2]$

(3) $[3;4]$

Revenons à l'exemple sur la croissance des bactéries.



Serait-il possible d'obtenir le taux de croissance des bactéries à un moment précis ; disons à la 4ème minute ?

Il est possible d'approcher la valeur en question en considérant plusieurs taux de variation moyens.

D'abord à gauche,

sur $[3;4]$	on a	$\dfrac{f(4)-f(3)}{4-3}$	$=\dfrac{25-16}{1}$	$=9$
sur $[3,5;4]$	on a	$\dfrac{f(4)-f(3,5)}{4-3,5}$	$=\dfrac{25-12,25}{0,5}$	$=9,5$
sur $[3,9;4]$	on a	$\dfrac{f(4)-f(3,9)}{4-3,9}$	$=\dfrac{25-24,01}{0,1}$	$=9,9$
sur $[3,99;4]$	on a	$\dfrac{f(4)-f(3,99)}{4-3,99}$	$=\dfrac{25-24,9001}{0,01}$	$=9,99$
sur $[3,999;4]$	on a	$\dfrac{f(4)-f(3,999)}{4-3,999}$	$=\dfrac{25-24,990001}{0,001}$	$=9,999$

Puis à droite,

sur $[4;5]$	on a	$\dfrac{f(4)-f(4)}{5-4}$	$=\dfrac{36-25}{1}$	$=11$
sur $[4;4,5]$	on a	$\dfrac{f(4,5)-f(4)}{4,5-4}$	$=\dfrac{30,25-25}{0,5}$	$=10,5$
sur $[4;4,1]$	on a	$\dfrac{f(4,1)-f(4)}{4,1-4}$	$=\dfrac{26,01-25}{0,1}$	$=10,1$
sur $[4;4,01]$	on a	$\dfrac{f(4,01)-f(4)}{4,01-4}$	$=\dfrac{25,1001-25}{0,01}$	$=10,01$
sur $[4;4,001]$	on a	$\dfrac{f(4,001)-f(4)}{4,001-4}$	$=\dfrac{25,010001-25}{0,001}$	$=10,001$

Il semble donc qu'à la 4ème minute, le taux de croissance sera très près de 10 bactéries/minute.

Peut-on résoudre le problème sans utiliser la calculatrice, en évitant ces longs calculs fastidieux ?

Utilisons la notion de ……………………

Voyons comment procéder.

a) On considère l'intervalle de temps $[4,t]$.

b) On trouve le taux de variation moyen de la fonction sur cet intervalle.

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{f(t)-f(4)}{t-4}$$

c) On évalue la limite lorsque t s'approche de 4 :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 4}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}&=\lim_{t\to 4}\frac{(t+1)^2-25}{t-4}=\frac{0}{0}\quad \text{CI}\\&=\lim_{t\to 4}\frac{(t^2+2t+1)-25}{t-4}\\&=\lim_{t\to 4}\frac{t^2+2t-24}{t-4}=\frac{0}{0}\quad \text{CI}\\&=\lim_{t\to 4}\frac{(t+6)(t-4)}{t-4}\\&=\lim_{t\to 4}(t+6)\\&=10\end{aligned}$$

La valeur obtenue s'appelle le **taux de variation instantané** de la population des bactéries à la 4ème minute.

Normalement, on devrait considérer l'intervalle

- $[4;t]$ (avec $t>4$) pour lequel le taux de variation moyen est

  $\dfrac{f(t)-f(4)}{t-4}$ et évaluer $\lim\limits_{t\to 4^+}\dfrac{f(t)-f(4)}{t-4}$

Puis ensuite, considérer l'intervalle

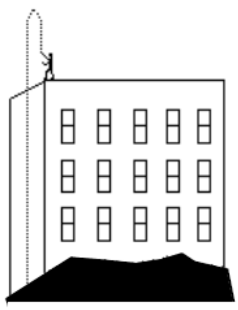
- $[t;4]$ (avec $t<4$) pour lequel le taux de variation moyen est

  $\dfrac{f(4)-f(t)}{4-t}$ et évaluer $\lim\limits_{t\to 4^-}\dfrac{f(4)-f(t)}{4-t}$

Mais cela est inutile puisque

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to 4^+}\dfrac{f(t)-f(4)}{t-4}\\ \lim\limits_{t\to 4^-}\dfrac{f(4)-f(t)}{4-t}=\lim\limits_{t\to 4^+}\dfrac{f(t)-f(4)}{t-4}\end{array}\right\}=\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{f(t)-f(4)}{t-4}$$

<u>Exercice :</u> Du sommet d'un bâtiment, on lance une balle vers le haut. La position de la balle par rapport au sol (en mètres) à l'instant *t* (en secondes) est donnée par $s(t)=-4,9t^2+25t+30$.



(1) Détermine la vitesse moyenne de la balle entre 1 et 3 secondes.

(2) Détermine la vitesse de la balle à la 1ère seconde et à la 3e seconde. Interprète les résultats obtenus.

Revenons-en au problème initial : comment tracer le graphique d'une fonction dont on ne connaît que les asymptotes ?