

UAA 4 :

La dérivée

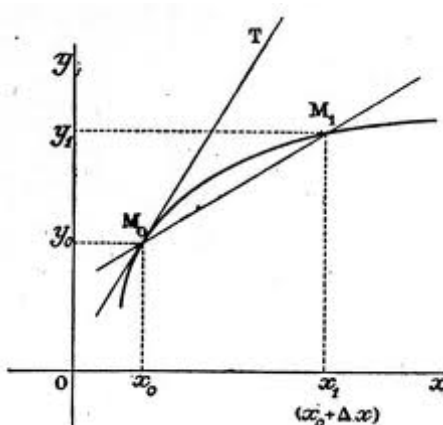


L'élève doit SAVOIR :

1. Définir "taux de variation moyen" et expliquer par une phrase ce qu'il représente.
2. Définir "nombre dérivé de f en a " et expliquer par une phrase ce que représente ce nombre.
3. Donner la condition pour qu'une fonction soit dérivable en $x = a$.
4. Définir "domaine de dérivabilité".
5. Expliquer et illustrer ce qu'est un point anguleux, un point de rebroussement et un point à tangente verticale.
6. Donner la formule de l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a et refaire la démarche qui permet de l'établir.
7. Démontrer les formules de dérivée des fonctions usuelles : fonction constante, fonction identique, fonction carrée, fonction cube, fonction puissance 4, fonction racine carrée et fonction inverse.
8. Démontrer les formules de dérivée de la somme de deux fonctions, du produit de deux fonctions, de l'inverse d'une fonction et du quotient de deux fonctions.
9. Démontrer les formules de dérivée de la fonction sinus, de la fonction cosinus et de la fonction tangente.
10. Donner toutes les formules de dérivée.
11. Donner les conditions pour qu'une fonction soit continue, continue à droite et/ou continue à gauche.
12. Donner la condition suffisante pour qu'une fonction admette un extremum en $x = a$.
13. Expliquer ce qu'est un point d'inflexion.
14. Expliquer comment la méthode de Newton-Raphson permet de calculer les racines d'une fonction.

L'élève doit ETRE CAPABLE DE :

1. Calculer un taux de variation moyen et un taux de variation instantané, et en donner une interprétation, dans le contexte de l'exercice.
2. Calculer le nombre dérivé d'une fonction en un réel en utilisant la définition (liée aux limites).
3. Donner $f'(a)$ à partir du graphique d'une fonction s'il existe. S'il n'existe pas, en expliquer la raison.
4. Déterminer l'équation d'une tangente.
5. Calculer la dérivée d'une fonction et la donner sous forme simplifiée et/ou factorisée.
6. Dire si une fonction est continue (éventuellement à gauche/droite) en un point et expliquer pourquoi.
7. Déterminer le nombre de racines d'une fonction/le nombre de solutions d'une équation, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.
8. Déterminer les intervalles de (dé)croissance d'une fonction ainsi que ses extremums.
9. Associer le graphique d'une fonction à celui de sa dérivée et réciproquement.
10. Rechercher les points d'inflexion.
11. Calculer les racines d'une fonction avec la méthode de Newton-Raphson.
12. Etudier une fonction.
13. Tracer le graphique d'une fonction dont on donne plusieurs informations.
14. Résoudre un problème d'optimisation.



La notion de dérivée a été inventée simultanément par Leibniz (philosophe et mathématicien allemand) et Newton (physicien, mathématicien et astronome anglais). Ces deux célèbres personnages poursuivirent presque en même temps, des objectifs aussi différents que la recherche d'un procédé général pour le calcul de la pente de la tangente à une courbe en un point (Leibniz) et la recherche d'un instrument mathématique adéquat pour l'étude du mouvement des corps (Newton).



Isaac Newton
(Woolsthorpe, 25/12/1642 -
Londres, 31/3/1727)

Isaac Newton
(Woolsthorpe, 25/12/1642 –
Londres, 31/03/172)



Gottfried Wilhelm von Leibniz
(Leipzig, 1/7/1645 -
Hannover, 14/11/1716)

Gottfried Wilhelm von Leibniz
(Leipzig, 01/0/1645 –
Hannover, 14/11/1716)

En 1797, dans son livre *Théorie des fonctions analytiques*, l'Italien Lagrange introduit le mot "dérivée" et la notation $f'(x)$ qu'il définit comme limite du taux de variation.

Le XIX^e siècle, tout en produisant des résultats, a été celui où l'analyse a résolu ses problèmes de fondement.

Les dérivées sont une partie importante des mathématiques qui ont de nombreux domaines d'application de nos jours. On peut citer, entre autres, les sciences (étude des mouvements en physique, de la vitesse de réaction en chimie,...), l'économie (tendance des marchés et variation des coûts...), le monde technique (conception de ponts, raccordement de courbes...).

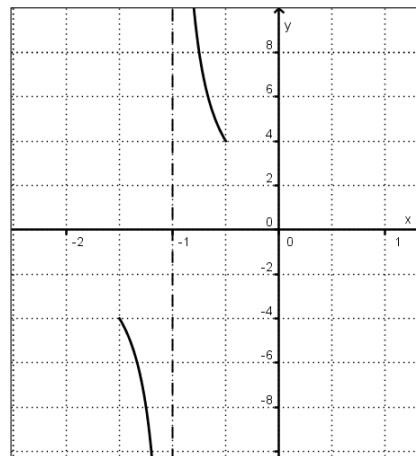


Joseph-Louis Lagrange
(Turin, 25/01/1736 –
Paris, 10/04/1813)

A. Introduction

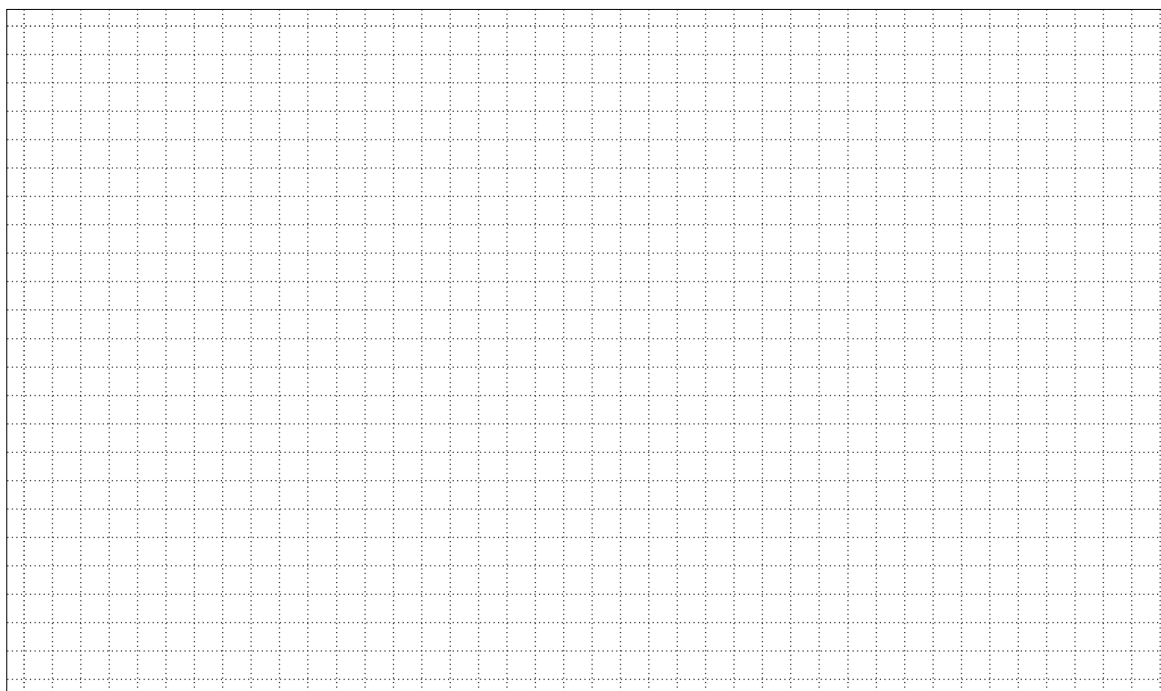
Les calculs de limites permettent d'obtenir certaines informations sur le graphique d'une fonction : ses asymptotes verticales, horizontales et/ou obliques.

Par exemple, grâce aux calculs, on peut dire que le graphe de la fonction $f(x) = \frac{2}{x+1}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$ car $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$. Ainsi, on connaît le comportement du graphique de la fonction autour de -1 .



Considérons à présent la fonction $f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 + 2x + 1}$ dont on connaît l'asymptote verticale : $AV \equiv x = -1$ ($\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$) et l'asymptote horizontale : $AH \equiv y = -1$.

Trace un graphe possible pour cette fonction.



Et pourtant, ces seules informations ne permettent pas de tracer le graphe de la fonction : comment savoir où dessiner des "bosses" et des "creux" ?

B. Taux de variation

Considérons une bactérie dont la croissance est définie par la fonction

$$f(t) = (1+t)^2$$

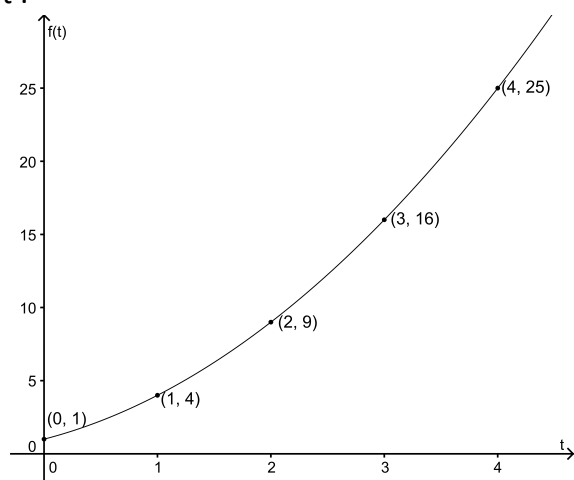
où $\left| \begin{array}{l} t \text{ représente le temps, en minutes,} \\ f(t) \text{ représente le nombre de bactéries au temps } t. \end{array} \right.$

Initialement ($t = 0$), le nombre de bactéries est $f(0) = (1+0)^2 = 1$.

Après une minute ($t = 1$), le nombre de bactéries devient $f(1) = (1+1)^2 = 4$.

Pour les quatre premières minutes, on obtient :

t (min.)	$f(t)$ (nombre de bactéries)
0	1
1	4
2	9
3	16
4	25



On remarque que la croissance des bactéries est de plus en plus rapide.

La population double, triple ou quadruple très rapidement.

Ainsi,

de $t = 0$ à $t = 1$, l'accroissement des bactéries est de $4 - 1 = 3$,

de $t = 1$ à $t = 3$, l'accroissement des bactéries est de $16 - 4 = 12$,

de $t = a$ à $t = b$, l'accroissement des bactéries sera de $f(b) - f(a)$.

Lorsqu'on étudie la croissance d'une fonction, on s'intéresse souvent à la vitesse à laquelle s'effectue cette croissance sur des intervalles donnés. On s'intéresse en fait à ce qu'on appelle le *taux de variation moyen* de la fonction.

Le taux de variation moyen des bactéries par rapport au temps

de $t = 0$ à $t = 1$ est de $\frac{4-1}{1-0} = 3$ bactéries/minute ,

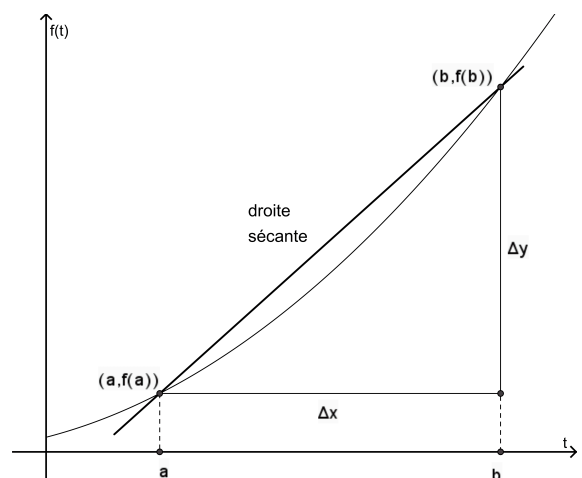
de $t = 1$ à $t = 3$ est de $\frac{16-4}{3-1} = 6$ bactéries/minute .

Le **taux de variation moyen** d'une fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ de son domaine est donné par

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Géométriquement, lorsqu'on calcule le taux de variation moyen d'une fonction sur l'intervalle $[a;b]$, on calcule une *pente*.

En fait, cette quantité correspond à la *pente de la droite sécante* passant par les points $(a;f(a))$ et $(b;f(b))$.



Exercice : Un camion de la compagnie ACME quitte l'entrepôt pour effectuer une livraison. La distance (en kilomètres) parcourue par le camion après avoir roulé t heures est donnée par l'équation

$$s(t) = 15t^2 \quad 0 \leq t \leq 4$$

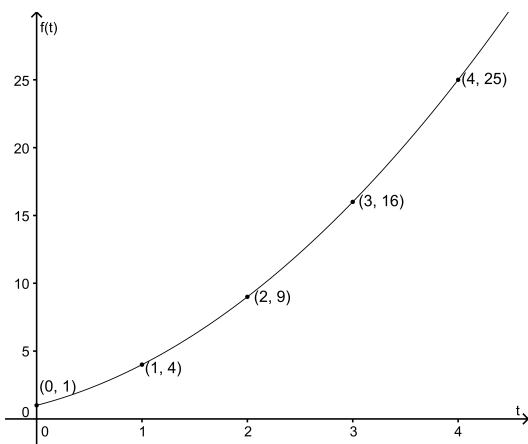
Calcule le taux de variation moyen de la distance parcourue par le camion sur les intervalles de temps indiqués.

(1) $[0;4]$

(2) $[0;2]$

(3) $[3;4]$

Revenons à l'exemple sur la croissance des bactéries.



Serait-il possible d'obtenir le taux de croissance des bactéries à un moment précis ; disons à la 4^{ème} minute ?

Il est possible d'approcher la valeur en question en considérant plusieurs taux de variation moyens.

D'abord à gauche,

sur $[3;4]$	on a $\frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{25-16}{1} = 9$
sur $[3,5;4]$	on a $\frac{f(4)-f(3,5)}{4-3,5} = \frac{25-12,25}{0,5} = 9,5$
sur $[3,9;4]$	on a $\frac{f(4)-f(3,9)}{4-3,9} = \frac{25-24,01}{0,1} = 9,9$
sur $[3,99;4]$	on a $\frac{f(4)-f(3,99)}{4-3,99} = \frac{25-24,9001}{0,01} = 9,99$
sur $[3,999;4]$	on a $\frac{f(4)-f(3,999)}{4-3,999} = \frac{25-24,9990001}{0,001} = 9,999$

Puis à droite,

sur $[4;5]$	on a $\frac{f(5)-f(4)}{5-4} = \frac{36-25}{1} = 11$
sur $[4;4,5]$	on a $\frac{f(4,5)-f(4)}{4,5-4} = \frac{30,25-25}{0,5} = 10,5$
sur $[4;4,1]$	on a $\frac{f(4,1)-f(4)}{4,1-4} = \frac{26,01-25}{0,1} = 10,1$
sur $[4;4,01]$	on a $\frac{f(4,01)-f(4)}{4,01-4} = \frac{25,1001-25}{0,01} = 10,01$
sur $[4;4,001]$	on a $\frac{f(4,001)-f(4)}{4,001-4} = \frac{25,010001-25}{0,001} = 10,001$

Il semble donc qu'à la 4^{ème} minute, le taux de croissance sera très près de 10 bactéries/minute.

Peut-on résoudre le problème sans utiliser la calculatrice, en évitant ces longs calculs fastidieux ?

Utilisons la notion de

Voyons comment procéder.

- On considère l'intervalle de temps $[4, t]$.
- On trouve le taux de variation moyen de la fonction sur cet intervalle.

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$

- On évalue la limite lorsque t s'approche de 4 :

$$\lim_{t \rightarrow 4} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(t+1)^2 - 25}{t - 4} = \frac{0}{0} \quad \text{CI}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(t^2 + 2t + 1) - 25}{t - 4}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t^2 + 2t - 24}{t - 4} = \frac{0}{0} \quad \text{CI}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(t+6)(t-4)}{t-4}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 4} (t+6)$$

$$= 10$$

La valeur obtenue s'appelle le **taux de variation instantané** de la population des bactéries à la 4^{ème} minute.

Normalement, on devrait considérer l'intervalle

- $[4; t]$ (avec $t > 4$) pour lequel le taux de variation moyen est

$$\frac{f(t) - f(4)}{t - 4} \text{ et évaluer } \lim_{t \rightarrow 4^+} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$

Puis ensuite, considérer l'intervalle

- $[t; 4]$ (avec $t < 4$) pour lequel le taux de variation moyen est

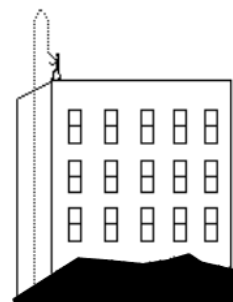
$$\frac{f(4) - f(t)}{4 - t} \text{ et évaluer } \lim_{t \rightarrow 4^-} \frac{f(4) - f(t)}{4 - t}$$

Mais cela est inutile puisque

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 4^+} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4} \\ \lim_{t \rightarrow 4^-} \frac{f(4) - f(t)}{4 - t} = \lim_{t \rightarrow 4^+} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4} \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$

Exercice : Du sommet d'un bâtiment, on lance une balle vers le haut. La position de la balle par rapport au sol (en mètres) à l'instant t (en secondes) est donnée par $s(t) = -4,9t^2 + 25t + 30$.

- (1) Détermine la vitesse moyenne de la balle entre 1 et 3 secondes.
- (2) Détermine la vitesse de la balle à la 1^{ère} seconde et à la 3^e seconde. Interprète les résultats obtenus.



Revenons-en au problème initial : comment tracer le graphique d'une fonction dont on ne connaît que les asymptotes ?

C. Nombre dérivé

1. Définition

Le taux de variation instantané d'une fonction f pour $x = a$ de son domaine est donné par

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ lorsque cette limite existe dans $\mathbb{R}$.

Ce nombre porte également le nom de **nombre dérivé de f en a** et est noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exemple : Calculons le nombre dérivé de la fonction $f(x) = 2x - 1$ en 1.

Exercice : Calcule le nombre dérivé de f en a si

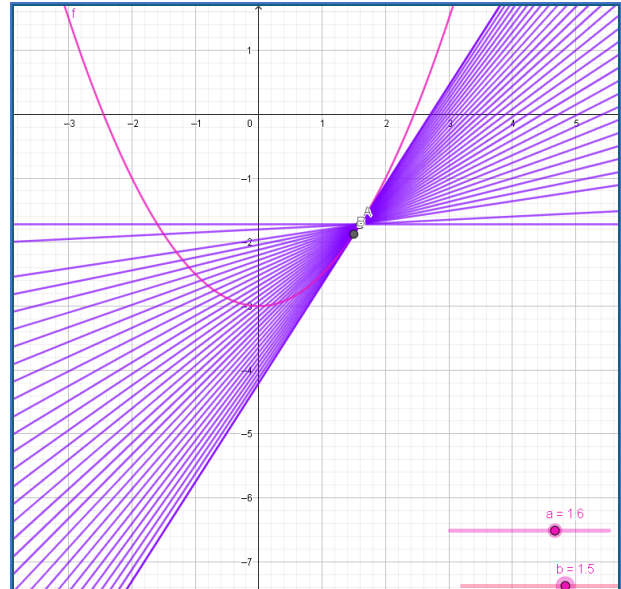
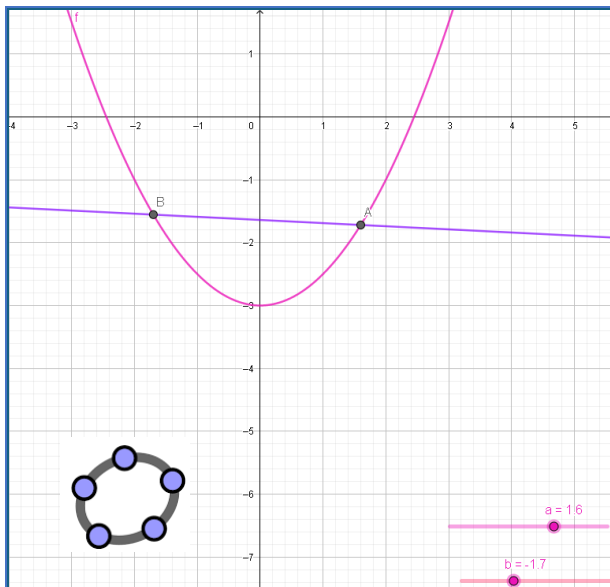
(1) $f(x) = 2x^2 + 1$ et $a = 1$

(2) $f(x) = 3x^2 - 3$ et $a = 0$

(3) $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ et $a = 2$

2. Interprétation géométrique du nombre dérivé

On considère une fonction f et la courbe la représentant, ainsi qu'un point A , d'abscisse a , sur la courbe.



S est la sécante passant par les points $A(a; f(a))$ et $B(x; f(x))$.

$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ représente la pente de la sécante S .

T est la tangente au graphe de f au point $A(a; f(a))$.

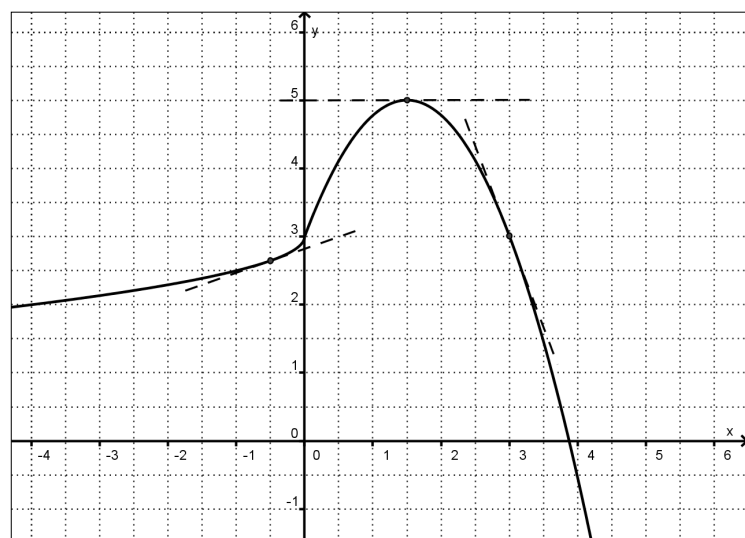
Ainsi, $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ représente la pente de la tangente T au graphe de f au point d'abscisse a .

Exercice : On donne quelques tangentes au graphique d'une fonction. Indique la réponse correcte.

(1) $f'(-0,5) = 0,35$ ou $f'(-0,5) = -0,35$

(2) $f'(1,5) = 1$ ou $f'(1,5) = 0$

(3) $f'(3) = \frac{8}{3}$ ou $f'(3) = -\frac{8}{3}$



Le nombre dérivé permet également de déterminer le domaine de dérivabilité d'une fonction :

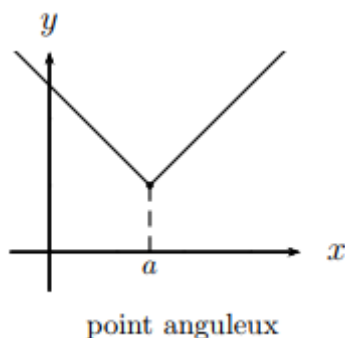
Une fonction f est dérivable en x si elle admet un nombre dérivé en x . Par conséquent, pour qu'une fonction soit dérivable en x , il est nécessaire et suffisant que le nombre dérivé à droite et le nombre dérivé à gauche existent dans $\mathbb{R}$ et soient égaux.

Ainsi, dire que f est dérivable en a signifie que le graphe de f admet une tangente non verticale au point $(a; f(a))$.

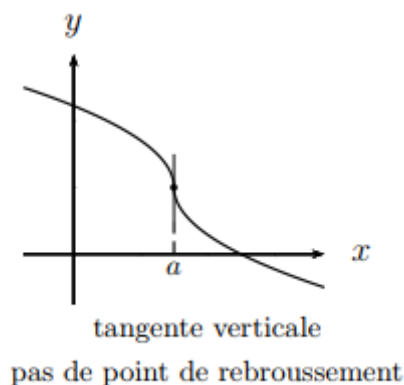
Définition : Le **domaine de dérivabilité** d'une fonction f est l'ensemble des réels où f est dérivable. Il est noté $\text{dom}_d f$.

La **non-dérivabilité** correspond à trois autres cas :

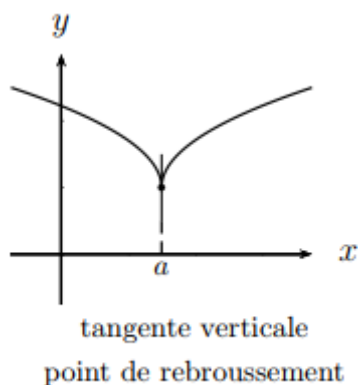
- le **point anguleux** où les dérivées à gauche et à droite existent dans $\mathbb{R}$ mais sont distinctes ;



- la **tangente verticale** où la dérivée n'existe pas dans $\mathbb{R}$.



- le **point de rebroussement** où les dérivées à gauche et à droite existent, sont toutes deux infinies mais distinctes.



Exercices :

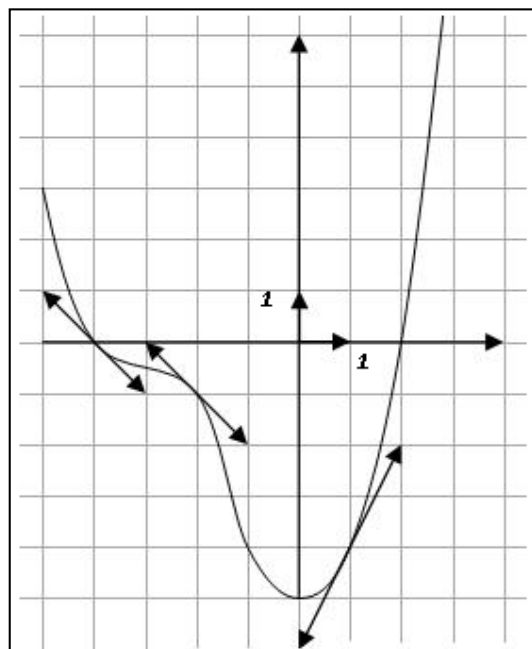


<https://bit.ly/3orxtW6>



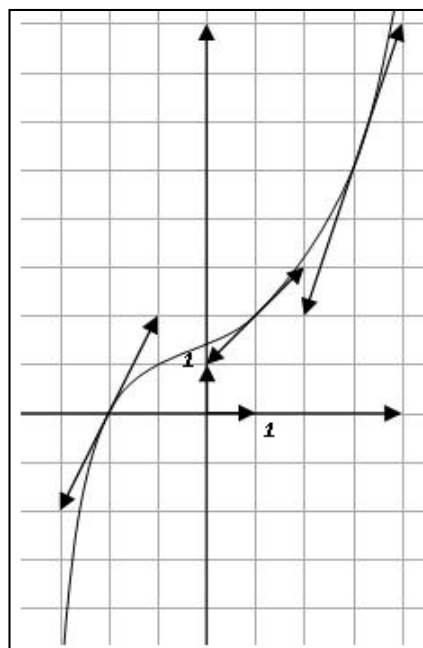
- A l'aide de la représentation graphique de la fonction f donnée ci-contre, indique

- (1) la valeur de $f'(1)$
- (2) les valeurs de x telles que $f'(x) = -1$
- (3) la valeur de x pour laquelle $f'(x) = 0$



- A partir du graphique de f , indique

- (1) la valeur de $f'(-2)$
- (2) le nombre dérivé de f en 3
- (3) les valeurs de x telles que $f'(x) < 0$



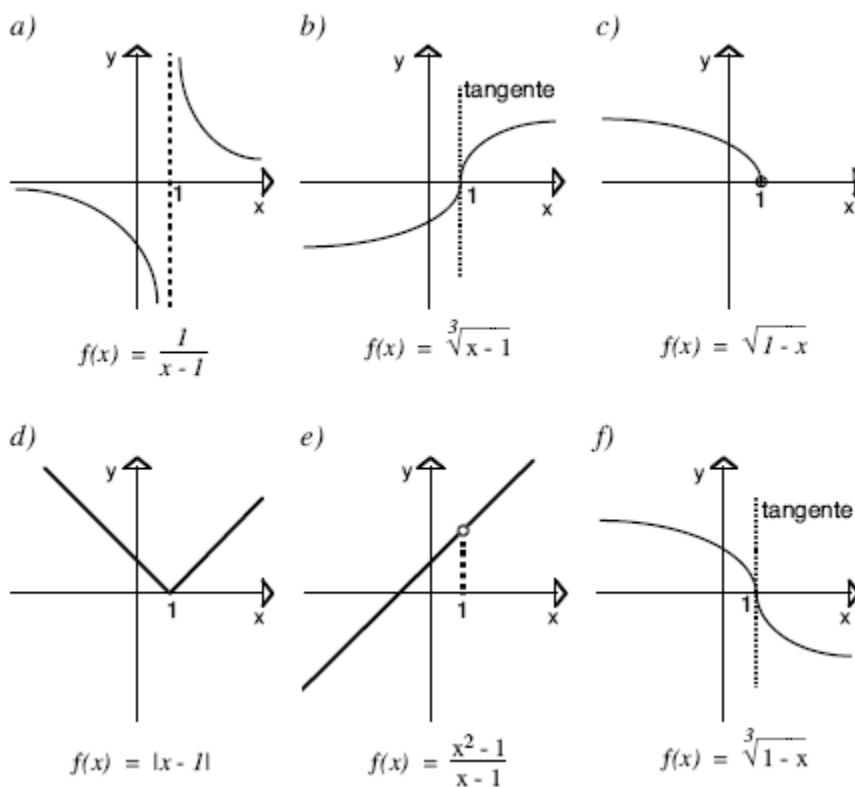
3. Vérifie, par calculs, que le point d'abscisse 1 est un point de rebroussement de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

4. Vérifie, par calculs, que le point d'abscisse 2 est un point anguleux de la fonction $f(x) = |x^2 - 4|$.



$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

5. En examinant les graphiques suivants, explique pourquoi les fonctions associées à ces graphiques ne sont pas dérivables lorsque $x = 1$.



3. Equation d'une tangente au graphique d'une fonction dérivable



EQUATION D'UNE TANGENTE AU GRAPHIQUE D'UNE FONCTION DÉRIVABLE

<https://youtu.be/IdIsqttNP6w>



Propriété : L'équation réduite de la tangente T au graphique de la fonction f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Démonstration :

Exemple : Déterminons l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = 2x - x^2$ au point d'abscisse -2 .

Exercice : Soit f une fonction dont on donne les renseignements suivants :

$$f(-2) = -1 \qquad f'(-2) = 3$$

$$f(0) = 2 \qquad f'(0) = 0$$

$$f(1) = 1 \qquad f'(1) = -2$$

Trace les trois tangentes puis un graphe possible de f .

D. Dérivée de fonctions usuelles



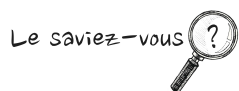
ANIMATION

<https://dgxy.link/00G0x>



Définition : La fonction dérivée première de f ou, plus simplement, la **dérivée première** de f , est la fonction qui, à chaque réel a en lequel f est dérivable, fait correspondre le nombre dérivé de f en a . On la note f' .

Exemple : On considère la fonction $f(x) = 3x^2 - 2x$. Cette fonction est définie en tout réel a .



Le saviez-vous ? La notation f' , due au mathématicien Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), n'est pas la seule notation possible pour désigner la dérivée d'une fonction f .

On peut également la noter $\frac{df}{dx}$, en sous-entendant que la variable est x . Cette autre notation prend tout son intérêt lorsque f est une fonction de plusieurs variables.



Ainsi, pour déterminer la fonction dérivée première d'une fonction, on doit calculer une limite.

Pour pouvoir déterminer cette fonction dérivée première plus rapidement, les mathématiciens ont établi un ensemble de formules, qu'il sera bon de connaître par ♥ ...

1. Fonction constante



DÉRIVÉE DE LA FONCTION CONSTANTE

<https://youtu.be/NSf2azawEa0>



Soit $f(x) = k$ (avec $k \in \mathbb{R}$). $\text{dom } f = \dots\dots$

Donc $f'(x) = \dots\dots$

ce que l'on note et $\text{dom}_d f = \dots\dots$

2. Fonction identique



DÉRIVÉE DE LA FONCTION IDENTIQUE

<https://youtu.be/oMIO11HqpVY>



Soit $f(x) = x$ $\text{dom } f = \dots\dots$

Donc $f'(x) = \dots\dots$

ce que l'on note et $\text{dom}_d f = \dots\dots$

3. Fonction puissance à exposant rationnel

(1) Fonction carrée



DÉRIVÉE DE LA FONCTION CARRÉE

<https://youtu.be/XY3gedB1leg>



Soit $f(x) = x^2$

$\text{dom } f = \dots\dots$

Donc $f'(x) = \dots\dots$

ce que l'on note

et $\text{dom}_d f = \dots\dots$

(2) Fonction cube



DÉRIVÉE DE LA FONCTION CUBE

<https://youtu.be/Wbt09nguJ-4>



Soit $f(x) = x^3$

$\text{dom } f = \dots\dots$

Donc $f'(x) = \dots\dots$

ce que l'on note

et $\text{dom}_d f = \dots\dots$

(3) Fonction puissance 4



DÉRIVÉE DE LA FONCTION PUISSANCE 4

<https://youtu.be/mEQOHbntLXw>



Soit $f(x) = x^4$

$\text{dom } f = \dots\dots$

Donc $f'(x) = \dots\dots$

ce que l'on note

et $\text{dom}_d f = \dots\dots$

(4) Fonction puissance à exposant naturel non nul

Soit $f(x) = x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}_0$)

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

En généralisant à partir des fonctions précédentes, on a $f'(x) = n.x^{n-1}$ ce que l'on note

$(x^n)' = n.x^{n-1}$ et $\text{dom}_d f = \mathbb{R}$

On admet que cette formule se généralise pour n rationnel non nul :

$$(x^n)' = n.x^{n-1} \text{ avec } n \in \mathbb{Q}_0$$

4. Fonction racine carrée



DÉRIVÉE DE LA FONCTION RACINE CARRÉE

<https://youtu.be/-DqiLmDEIn4>



Soit $f(x) = \sqrt{x}$

$\text{dom } f = \dots\dots$

Donc $f'(x) = \dots\dots$

ce que l'on note

et $\text{dom}_d f = \dots\dots$

5. Fonction inverse



DÉRIVÉE DE LA FONCTION INVERSE

https://youtu.be/I_tzahKJ7Xc



Soit $f(x) = \frac{1}{x}$

$\text{dom } f = \dots\dots$

Donc $f'(x) = \dots\dots$

ce que l'on note

et $\text{dom}_d f = \dots\dots$

E. Dérivées et opérations

Soient f et g deux fonctions dérivables en a .

1. Somme (ou différence) de deux fonctions



DÉRIVÉE DE LA SOMME DE DEUX FONCTIONS

https://youtu.be/ylvy_kXlzsE



$$(f + g)'(a) =$$

Donc

Exemples : $(x^2 + 7)' = \dots\dots$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)' = \dots\dots$$

2. Produit de deux fonctions



DÉRIVÉE DU PRODUIT DE DEUX FONCTIONS

<https://youtu.be/-qYgmw8Mcw8>



$$(f \cdot g)'(a) =$$

Donc

Par conséquent : Produit d'une fonction par un réel :

$$(k \cdot f(x))' = \dots$$

Donc

Exemples : $(5x^2)' = \dots$

$$[x^3 \cdot (1 - 2x)]' = \dots$$

3. Inverse d'une fonction



DÉRIVÉE DE L'INVERSE D'UNE FONCTION

<https://youtu.be/vdb41irYgBM>



$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) =$$

Donc

Exemple : $\left(\frac{1}{x^2 - 3x + 1}\right)' = \dots\dots$

4. Quotient de deux fonctions



DÉRIVÉE DU QUOTIENT DE DEUX FONCTIONS

<https://youtu.be/73EeTwENXnE>



$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) =$$

Donc

Exemples : $\left(\frac{2x+5}{1-4x}\right)' = \dots\dots$

$$\left(\frac{2}{3x+1}\right)' = \dots\dots$$

$$\left(\frac{3x+1}{2}\right)' = \dots\dots$$

5. Exercices



<https://bit.ly/3B2U807>



Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes et donne-la, si possible, sous forme factorisée et/ou simplifiée, sans laisser d'exposant fractionnaire, ni négatif.

(1) $f(x) = x + 3$

(2) $f(x) = 4x$

(3) $f(x) = \frac{x}{3} - 1$

(4) $f(x) = x^3 - 5x + 4$

(5) $f(x) = (x+1)(2x-3)$

(6) $f(x) = (3x^3 - 5x + 2)\left(\frac{x}{2} - 5\right)$

(7) $f(x) = (2x^2 + 3)(4x + 5)$

(8) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(9) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(10) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

(11) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

(12) $f(x) = \frac{5}{3x-1}$

(13) $f(x) = \frac{5x+3}{x^2}$

(14) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$



Pour rappel :

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

F. Dérivée de la composée de deux fonctions

On admet les formules suivantes :

$$\begin{aligned}(f^n)' &= n.f^{n-1}.f' \\ (\sqrt{f})' &= \frac{f'}{2\sqrt{f}}\end{aligned}$$

Exemples : $\left[\left(5x^3 - 7x + \frac{1}{x} \right)^3 \right]' = \dots\dots$
 $(\sqrt{1-4x})' = \dots\dots$

Exercice :



<https://bit.ly/3sr0h2m>



Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes et donne-la, si possible, sous forme factorisée et/ou simplifiée, sans laisser d'exposant fractionnaire, ni négatif.

Série 1 :

(1) $f(x) = (2x+1)^3$

(4) $f(x) = \frac{5}{(2x+3)^3}$

(2) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 8x + 1}$

(5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 - 1}}$

(3) $f(x) = \left(\frac{x^2 + 3}{4x - 1} \right)^5$

(6) $f(x) = \sqrt{(3x^2 - 1)^3}$

Série 2 :

(1) $f(x) = (x-2)^2(3x+1)$

(4) $f(x) = \frac{4x-2}{(x+1)^3}$

(2) $f(x) = (2x-1)^3(3x+2)^4$

(5) $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{(2x+3)^3}$

(3) $f(x) = \frac{(3x+2)^2}{x-1}$

(6) $f(x) = (x+2)\sqrt{x^2 + 3}$

G. Dérivées des fonctions trigonométriques

1. Fonction sinus



DÉRIVÉE DE LA FONCTION SINUS

<https://youtu.be/-8fTluX79W4>



Soit $f(x) = \sin x$

$\text{dom } f = \dots\dots$

Donc $f'(x) = \dots\dots$

ce que l'on note et $\text{dom}_d f = \dots\dots$

On admet que

2. Fonction cosinus



DÉRIVÉE DE LA FONCTION COSINUS

https://youtu.be/gIu_xe2yLCg



Soit $f(x) = \cos x$

$\text{dom } f = \dots\dots$

Donc $f'(x) = \dots\dots$

ce que l'on note

et $\text{dom}_d f = \dots\dots$

On admet que

3. Fonction tangente



DÉRIVÉE DE LA FONCTION TANGENTE

https://youtu.be/24QuIW_tVi8



Soit $f(x) = \tan x$

$\text{dom } f = \dots\dots$

Donc $f'(x) = \dots\dots$

ce que l'on note

et $\text{dom}_d f = \dots\dots$

On admet que

Exemples : $[\sin(5x)]' = \dots\dots$

$$\left[\tan\left(\frac{1}{x}\right) \right]' = \dots\dots$$

$$\left[\cos^3\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \right]' = \dots\dots$$

$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \dots\dots$$

4. Exercices



<https://bit.ly/3JshKOO>



Calcule la dérivée de chacune des fonctions et donne-la, si possible, sous forme factorisée et/ou simplifiée.

Série 1 :

$$(1) \quad f(x) = \sin x \cdot \cos x$$

$$(5) \quad f(x) = \cos x + \sin x \cdot \tan x$$

$$(2) \quad f(x) = x \cdot \cos x - \sin x$$

$$(6) \quad f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$(7) \quad f(x) = x - \sin x \cdot \cos x$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

Série 2 :

$$(1) \quad f(x) = \cos(3x)$$

$$(4) \quad f(x) = \sqrt{\tan x}$$

$$(2) \quad f(x) = \cos^3 x$$

$$(5) \quad f(x) = \sqrt[3]{\cos^2 x}$$

$$(3) \quad f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(6) \quad f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$$

H. Exercices variés



<https://bit.ly/3gMvIE9>



1. Calcule $f'(x)$ sachant que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$(1) f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (2) f(x) = \frac{a}{x} \quad (3) f(x) = (ax + b)(cx + d)$$

2. Calcule la dérivée seconde de

$$(1) f(x) = 3x - 2$$

$$(4) f(x) = \sqrt{x}$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$(5) f(x) = \frac{x+1}{x}$$

$$(3) f(x) = x^3 + 3x$$



La dérivée seconde de f se note f'' et se calcule en dérivant la dérivée de f :

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

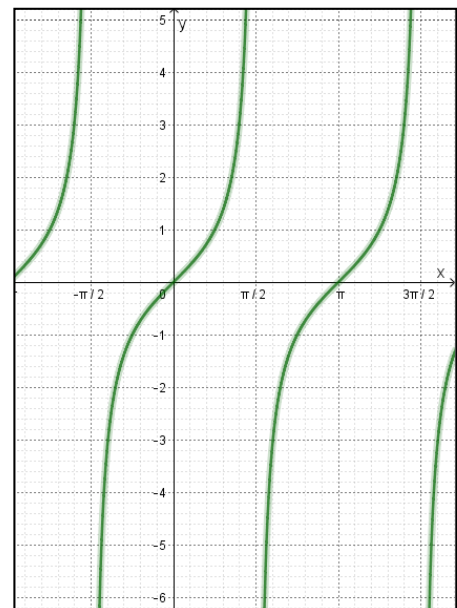
3. Détermine l'équation réduite de la tangente au graphique de $f(x) = 2x^2 - 5x$ en son point d'abscisse $a = 1$.

4. Détermine l'équation réduite de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = \frac{3x+5}{x+1}$ en son point d'abscisse 1.

Représente ensuite la fonction, en indiquant les manipulations graphiques, et la tangente dans un seul repère orthonormé.

5. Détermine l'équation réduite de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = \tan x$ en son point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.

On a représenté la fonction $f(x) = \tan x$, représente également la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.



6. Détermine l'équation réduite de la tangente au graphe de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$ en son point d'abscisse $a = -2$.
- Représente ensuite la fonction, en indiquant les manipulations graphiques, et la tangente dans un seul repère orthonormé.



Rappel : Pour tracer le graphique d'une parabole $y = ax^2 + bx + c$, on utilise sa forme canonique $y = a(x - m)^2 + p$ (avec $m = -\frac{b}{2a}$ et $p = -\frac{\Delta}{4a}$) et les manipulations graphiques.

7. Détermine le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \sqrt{x-1}$

(3) $f(x) = (x+2)^{\frac{1}{3}}$

(2) $f(x) = (x+2)^{\frac{1}{6}}$

(4) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 5x + 6}$

8. La fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ est-elle dérivable en 0 ? Justifie ta réponse.

9. Détermine l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$ au point d'abscisse 2. Trace ensuite la courbe et la tangente.

10. Soit $f(x) = ax^2 + bx$; trouve les valeurs de a et b sachant que $f(-1) = 5$ et la pente de la tangente en $x = 1$ est 7.

11. Pour quelles valeurs de x , la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = (x-3)(x+3)^2$ est-elle horizontale ?

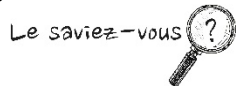
12. Calcule les dérivées à droite et à gauche de 5 de la fonction $f(x) = |x-5|$ pour montrer qu'elle n'est pas dérivable en 5.



$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

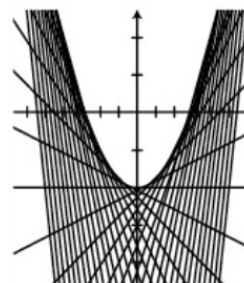
13. Détermine les coordonnées de tous les points de la courbe de la fonction

$$f(x) = (x^2 - 2)(2x + 1) \text{ en lesquels la pente de la tangente vaut } -2.$$



Le mot « tangente » provient du latin tangere qui veut dire toucher.

C'est pourquoi, autrefois, on appelait poétiquement « touchante » une droite tangente à une courbe.



Pour chercher :

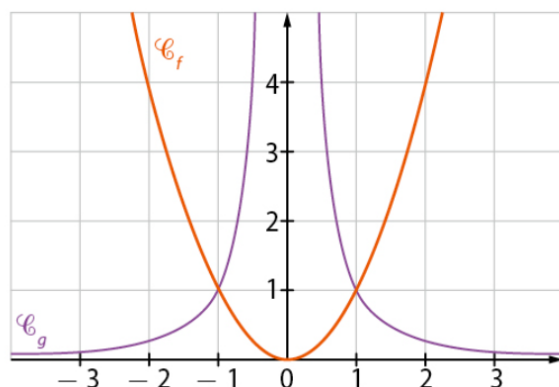
1. On considère les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$ représentées ci-dessous.

(1) Détermine une équation réduite de la tangente T_a en f au point d'abscisse a .

(2) Détermine une équation réduite de la tangente T'_a en g au point d'abscisse a .

(3) Détermine toutes les valeurs de a pour lesquelles T_a et T'_a sont perpendiculaires.

Sol : $a = -2$ et $a = 2$



2. On note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de la fonction carrée.

Soit A et B deux points distincts de cette parabole et t_A et t_B les tangentes à la parabole aux points A et B .

(1) Démontre que t_A et t_B sont sécantes.

On note C le point d'intersection des tangentes et D le point de la parabole ayant la même abscisse que C .

(2) Détermine l'équation de la tangente à la parabole $\mathcal{P}$ au point D (cette équation s'exprimera en fonction des abscisses des points C et D).

(3) Conjecture le rapport des aires des triangles ABC et ABD .

3. Une parabole a pour tangentes les droites $d_1 \equiv y = 4x - 4$, $d_2 \equiv y = 2x - 3$ et $d_3 \equiv y = -2x - 7$.

Détermine une équation de cette parabole.

Sol : $P \equiv y = x^2 + 2x + 5$

4. Existe-t-il une tangente à la courbe d'équation $y = \frac{2x}{x-1}$ qui passe par le point de coordonnées $(-2; -1)$?

Sol : Non, mais il faut le prouver...

5. Détermine l'équation de deux droites passant par le point $(1; -5)$ et qui sont tangentes au graphe de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.

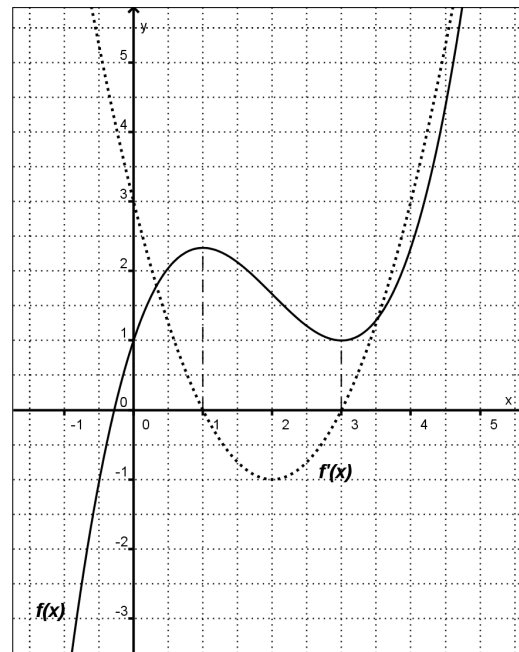
I. Dérivée première et croissance d'une fonction

1. Pour découvrir

On donne, dans un même repère, les graphiques de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ et de sa dérivée $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.

Complète le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
Signe de f'				
Croissance de f				



Quelle correspondance peut-on établir entre la croissance de la fonction f et le signe de f' ?

2. Synthèse

L'étude du de la dérivée d'une fonction permet de connaître
..... de cette fonction.

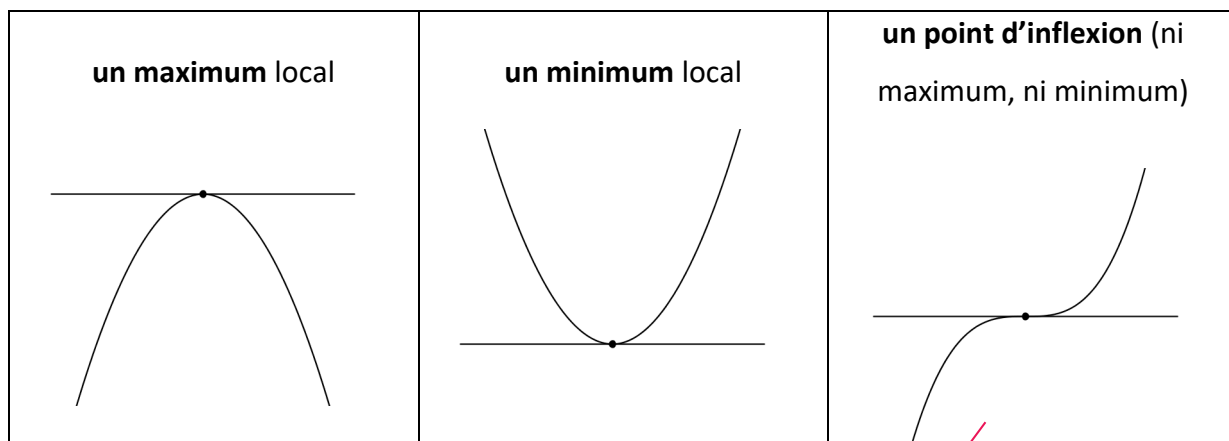
Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, alors f est **croissante** ($\nearrow$) sur cet intervalle.

Si $f'(x) < 0$ sur un intervalle, alors f est **décroissante** ($\searrow$) sur cet intervalle.

Propriété : Condition *suffisante* pour être un extremum local :

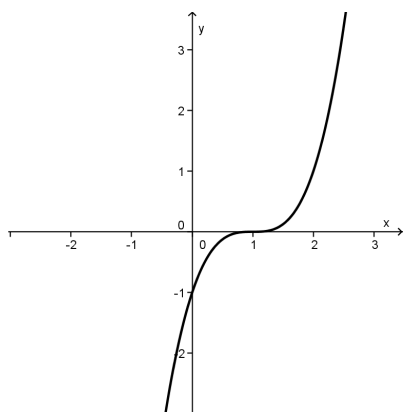
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert contenant a . Si $f'(a) = 0$ et change de signe de part et d'autre de a , alors f admet un **extremum** local en $x = a$.

Lorsque la dérivée s'annule, la tangente est horizontale et la courbe présente un **point stationnaire** qui peut être :



La dérivée peut s'annuler en $x = a$ sans changement de signe. Ce point $(a; f(a))$ n'est pas un maximum ou un minimum.

Exemple : Considérons la fonction $f(x) = (x-1)^3$ dont la dérivée $f'(x) = 3(x-1)^2$ s'annule pour $x = 1$ et est toujours positive. Cette fonction ne présente pas d'extremum pour $x = 1$; il s'agit d'un point d'inflexion.

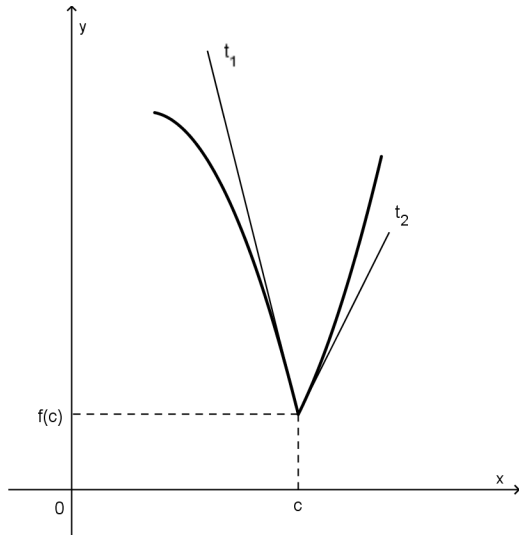


x	1		
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	0 Point à tangente horizontale	↗



La propriété précédente est une condition *suffisante* : une extrémité d'un intervalle fermé peut fournir un extremum de même qu'un point où la fonction n'est pas dérivable (comme un point de rebroussement ou un point anguleux)

Exemples :

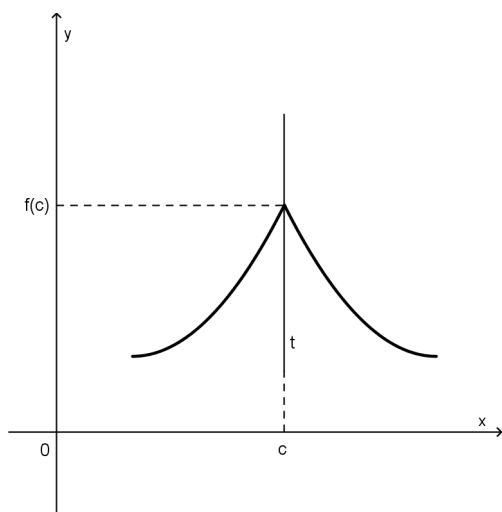


$(c; f(c))$ est un **point anguleux**.

La dérivée n'existe pas en c , mais elle change de signe.

Le graphique de f admet deux demi-tangentes distinctes.

f a un **minimum** en c .



$(c; f(c))$ est un **point de rebroussement**.

La dérivée n'existe pas en c , mais elle change de signe.

Le graphique de f admet une tangente verticale.

f a un **maximum** en c .

4. Mode opératoire pour rechercher les extremums d'une fonction



1. Calculer $f'(x)$.

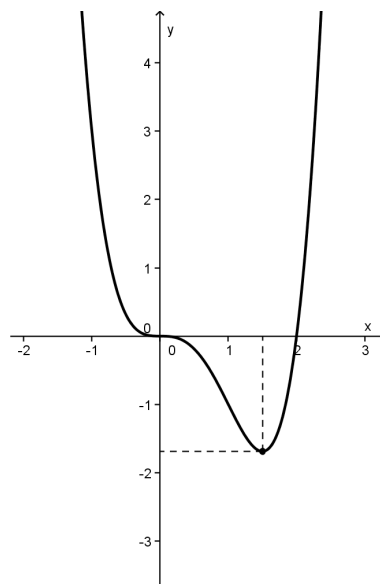
2. Etablir le tableau de signe de $f'(x)$.

3. De ce tableau, en déduire les variations de f (croissance et/ou décroissance) ainsi que les éventuels extremums, en calculant leurs coordonnées.

Exemples :

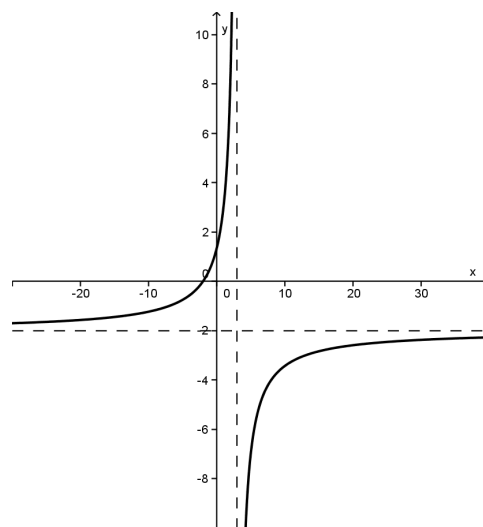
(1) Recherchons les extremums de la fonction

$$f(x) = x^4 - 2x^3.$$



(2) Recherchons les extremums de la fonction

$$f(x) = \frac{2x+4}{3-x}.$$

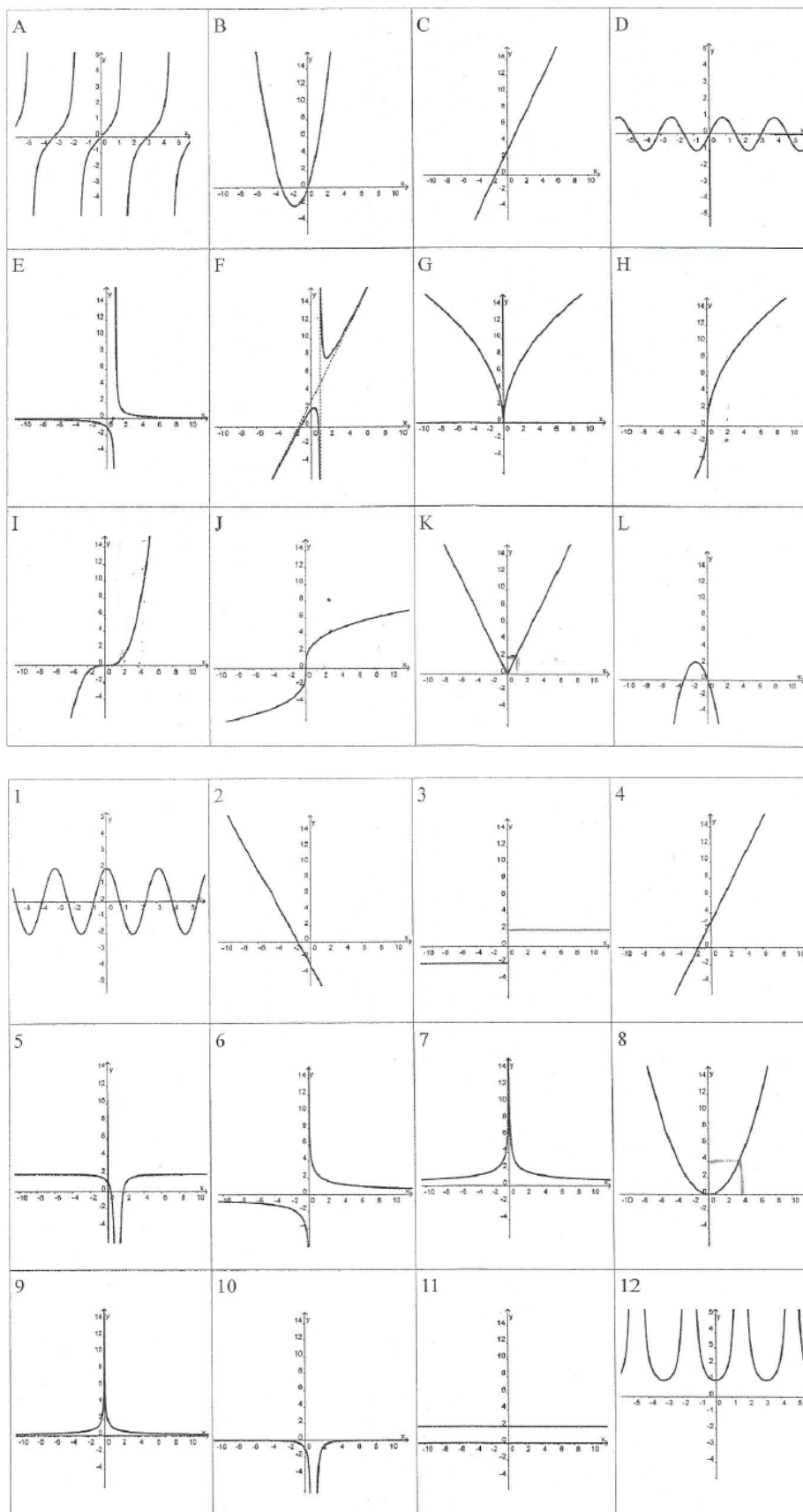


5. Exercices



<https://bit.ly/3gWk17h>

1. Voici les graphiques de 12 fonctions (graphiques A à L) et de leurs dérivées (graphiques 1 à 12). Associe chaque fonction à sa dérivée.



2. Détermine les coordonnées des éventuels extremums des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = (x-1)^2(2x+3)$

(2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

(3) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$

(4) $f(x) = x^2(3x^2 + 2x - 3)$

(5) $f(x) = x^6 + x^4$

(6) $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

3. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(1) Détermine son domaine.

(2) Détermine les éventuelles asymptotes verticales et horizontales.

(3) Détermine les variations de f .

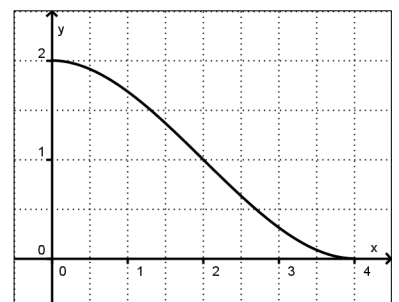
(4) Trace une esquisse du graphique de la fonction.

4. Détermine les coordonnées des extremums de la fonction $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$ sur l'intervalle $]-\pi; \pi[$.

5. On donne la fonction $f(x) = ax + b + \frac{1}{x}$. Détermine a et b de sorte que $f(x)$ ait un maximum en $(-1; -5)$.

6. La figure ci-contre représente le profil d'un toboggan destiné à de jeunes enfants. La hauteur du toboggan est de 2 mètres et sa longueur de 4 mètres. Pour des raisons de sécurité, les pentes au départ et à l'arrivée doivent être horizontales.

Détermine l'expression d'une fonction du 3^{ème} degré dont le graphique donne l'allure du toboggan ; cette fonction doit vérifier les contraintes de sécurité.



PES :



1. Soit $f(x) = x^3 + px - 1$.

(1) Quelle condition doit remplir $p \in \mathbb{R}$ pour que la fonction n'ait pas d'extremum ?

(2) Quelle condition doit remplir $p \in \mathbb{R}$ pour que la fonction ait un maximum et un minimum et 3 racines différentes ?

(Indice : quel est le signe du produit du maximum et du minimum s'il y a 3 racines différentes ?)

(ERM, 2020)

2. Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} - x$.

Quelle affirmation est correcte ?

A : La fonction f est partout croissante.

B. La fonction f est partout décroissante.

C : La fonction f a un maximum.

D : La fonction f a un minimum.

(Ijkingtoets, 2016)

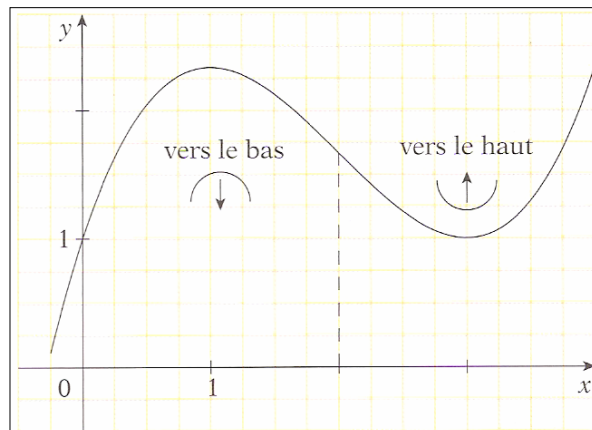
J. Dérivée seconde et concavité d'une fonction

1. Pour découvrir

Une courbe peut tourner sa **concavité vers le haut** ou **vers le bas**.

Précise la position des tangentes par rapport à la courbe :

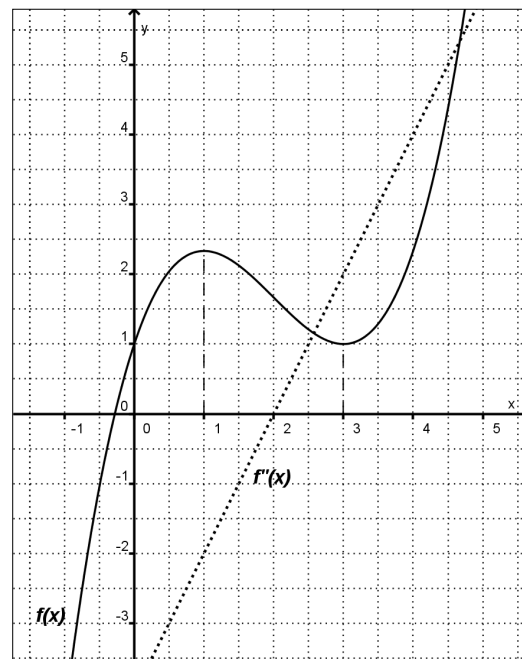
- (1) lorsque la concavité est tournée vers le bas ;
- (2) lorsque la concavité est tournée vers le haut.



La figure ci-contre montre, dans un même repère, les graphiques de $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ et de $f''(x) = 2x - 4$.

Complète le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de f''			
Concavité de f			



Quelle correspondance peut-on établir entre le sens de la concavité de la courbe $y = f(x)$ et le signe de f'' ?

2. Synthèse

La **dérivée seconde** d'une fonction est la dérivée de la dérivée première : $f''(x) = (f'(x))'$.

L'étude du de la dérivée seconde d'une fonction permet de connaître
..... de cette fonction.

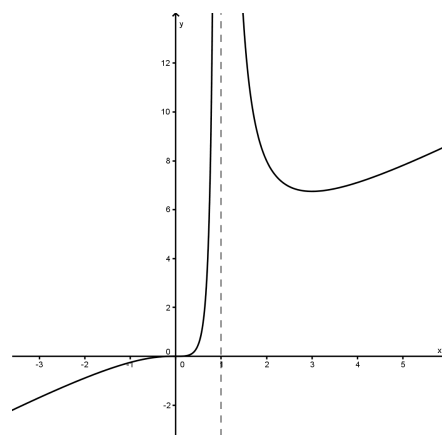
Si $f''(x) > 0$ sur un intervalle, alors f tourne sa **concavité vers le haut** sur cet intervalle.

Si $f''(x) < 0$ sur un intervalle, alors f tourne sa **concavité vers le bas** sur cet intervalle.

Si $f''(x) = 0$ en un point et si f'' change de signe en ce point, alors ce point est un **point d'inflexion**. Il s'agit donc d'un point où la concavité change de sens.

Exemple : Etudions la concavité de la fonction

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$



3. Mode opératoire pour rechercher les points d'inflexion d'une fonction



1. Calculer $f''(x)$.
2. Etablir le tableau de signe de $f''(x)$.
3. De ce tableau, en déduire la concavité de f (vers le haut et/ou vers le bas) ainsi que les éventuels points d'inflexion, en calculant leurs coordonnées.

4. Exercices



<https://bit.ly/34L8RkN>



1. Détermine les coordonnées des éventuels points d'inflexion des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3$

(2) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x - 3$

(3) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

2. Recherche la valeur des paramètres m et p si la fonction $f(x) = x^3 + 2mx^2 - 3px + 1$ admet un point d'inflexion en $(1; -4)$.

3. Soit la fonction $f(x) = x^3 + 3ax^2 + a^3$ où $a > 0$.

- (1) Détermine les coordonnées des extremums ; précise s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.
- (2) Détermine les coordonnées des points d'inflexion du graphique de f .
- (3) Pour quelle(s) valeur(s) de a le graphique de f a-t-il un point d'inflexion où la pente de la tangente vaut -3 ?

K. Dérivabilité et continuité

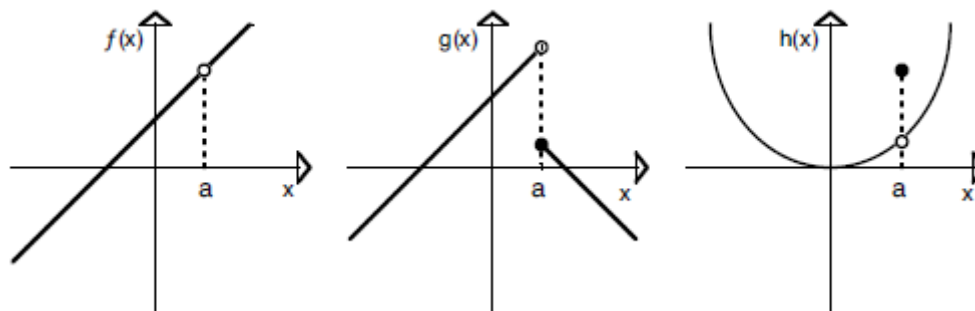
1. *Fonction continue*

La notion de continuité est d'une grande importance en analyse car la dérivée ainsi que plusieurs règles tirées du calcul différentiel ne prennent leur sens que sur les fonctions continues.

L'adjectif continu a, en mathématiques, une signification très rapprochée de son sens courant. Par exemple, lorsque nous disons d'une personne qu'elle parle continuellement, nous voulons dire qu'elle parle d'une façon ininterrompue. Par analogie, nous dirons qu'intuitivement une fonction est continue en une valeur donnée de son domaine si son graphique est ininterrompu de part et d'autre de cette valeur. Aucun saut, aucune interruption, aucune irrégularité ne doit être noté autour de cette valeur.

(1) Définition de continuité

Prenons à présent les fonctions définies par les graphiques suivants :



Les trois graphiques sont "brisés" lorsque $x = a$:

- a n'appartient pas au domaine de définition de la première fonction ;
- la deuxième fonction subit un saut brusque lorsque $x = a$;
- la troisième fonction présente une irrégularité de nature différente des 2 autres fonctions en $x = a$.

Mais dans les trois cas, nous dirons que la fonction n'est pas continue en $x = a$.

Evidemment, lorsque l'on connaît le graphique de la fonction, l'étude de continuité de cette fonction se fait en un clin d'œil. Mais généralement, le graphique nous est inconnu alors comment exprimer cette notion analytiquement ?

En utilisant la notion de limite !

Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et un réel a .

f est **continue en a** si et seulement si on vérifie successivement les deux critères suivants :

(1) $a \in \text{dom } f$

(2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Comment vérifier qu'une fonction est continue ?

Pour prouver que la fonction définie par $f(x) = 2x + 3$ est continue en 4 ($4 \in \text{dom } f$), il faut établir que $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) = 11$.

Pour ce faire, on ne peut pas se contenter de calculer cette limite de manière habituelle :

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (2x + 3) = 2 \cdot 4 + 3 = 11.$$

En procédant ainsi, on utilise le fait que la limite en 4 de la fonction est égale à l'image de 4 par cette fonction. Cela revient à postuler que la fonction est continue. Or, ici, c'est ce qu'il faut établir.

Pour démontrer que $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$, on utilise la définition de limite.

Sachant que $\text{dom } f = \mathbb{R}$, il faut établir que

(1) 4 adhère à $\mathbb{R}$

(2) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}_0^+)(\forall x \in \mathbb{R}) : |x - 4| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(4)| < \varepsilon$

La première condition est vérifiée puisque $4 \in \mathbb{R}$.

La seconde condition peut s'écrire :

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}_0^+)(\forall x \in \mathbb{R}) : |x - 4| < \delta \Rightarrow |2x + 3 - 11| < \varepsilon$$

ou encore :

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}_0^+)(\forall x \in \mathbb{R}) : |x - 4| < \delta \Rightarrow |2x - 8| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$. On doit trouver une valeur de δ telle que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : |x - 4| < \delta \Rightarrow |2x - 8| < \varepsilon$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : |x - 4| < \delta \Rightarrow 2 \cdot |x - 4| < \varepsilon$$

Si on pose $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, on a

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : |x - 4| < \delta \Rightarrow 2 \cdot |x - 4| < 2 \cdot \delta = \varepsilon$$

En pratique, on détermine une valeur de δ , qui dépend généralement de ε . Cette valeur de δ permet de conclure.

Intuitivement une fonction est discontinue en une valeur donnée de sa variable indépendante lorsque pour cette valeur, le graphique de la fonction est marqué par une interruption sous forme de *trou*, de *saut*, d'*explosion* ou *par défaut* lorsque la fonction n'est pas définie autour de la valeur en question. En somme, lorsqu'on trace le graphique d'une fonction, on est en présence d'une discontinuité à chaque fois que l'on doit lever le crayon.

Certaines situations demanderont une plus grande précision. Même si une fonction n'est pas continue lorsque $x = a$, elle peut être continue à *droite* en $x = a$ ou à *gauche* en $x = a$.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

f est **continue à gauche en a** si et seulement si on vérifie successivement les deux critères suivants :

(1) $a \in \text{dom } f$

(2) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

f est **continue à droite en a** si et seulement si on vérifie successivement les deux critères suivants :

(1) $a \in \text{dom } f$

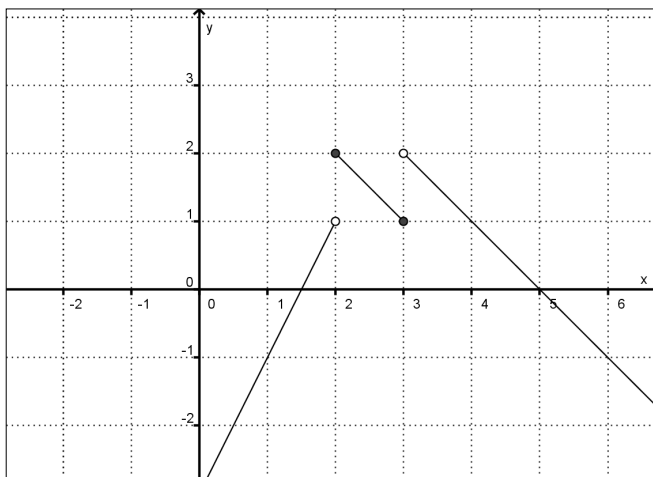
(2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

Exemple :

La fonction

$$f : x \rightarrow \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 2 \\ -x+4 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ -x+5 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

est continue à droite en 2 et continue à gauche en 3.



Exercices :

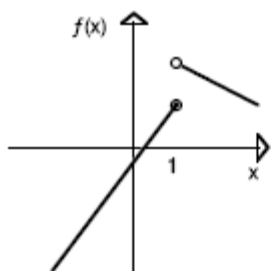
1. Dis si les fonctions associées aux graphiques suivants sont continues

(1) à gauche en $x = 1$

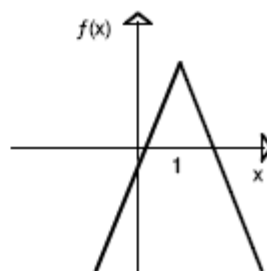
(2) à droite en $x = 1$

(3) pour $x = 1$

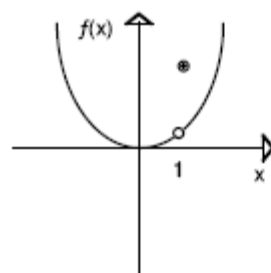
a)



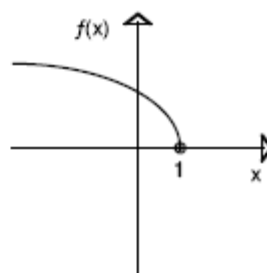
b)



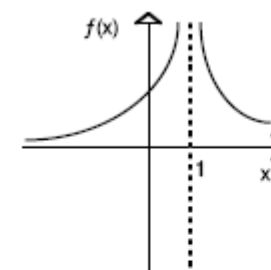
c)



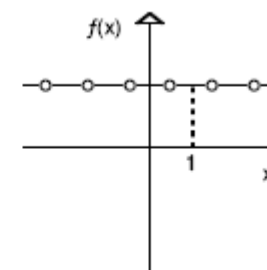
d)



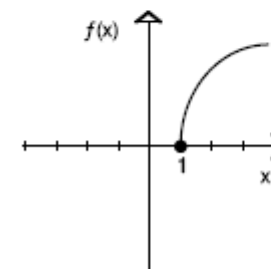
e)



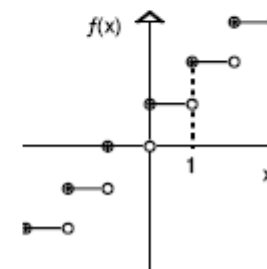
f)



g)



h)



2. Utilise le critère de continuité pour démontrer que les fonctions suivantes sont continues en a :

(1) $f(x) = 4x - 1$ avec $a = 3$

(2) $f(x) = x^2$ avec $a = 2$

3. Détermine si les fonctions ci-dessous sont discontinues pour la valeur de a donnée.

Trace également le graphe de ces fonctions en utilisant GéoGébra.

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \end{cases} \quad a = -1$

(2) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad a = 2$

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} & \text{si } x < 1 \\ 1 - 3x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad a = 1$

2. Continuité sur un intervalle

On dit qu'une fonction est **continue sur l'intervalle ouvert** $]a; b[$ si elle est continue en tout point de l'intervalle.

On dit qu'une fonction est **continue sur l'intervalle fermé** $[a; b]$ si elle est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$, si elle est continue à droite en $x = a$ et si elle est continue à gauche en $x = b$.

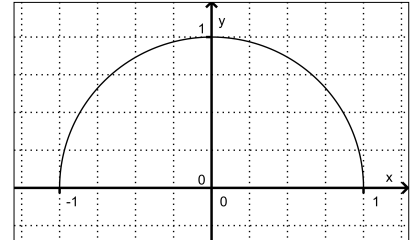
Toutes les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition :

- polynômes (en ce compris les fonctions constantes et du premier degré)
- rationnelles
- racines $n^{\text{ème}}$
- trigonométriques et trigonométriques réciproques (ces fonctions seront étudiées en 6^e)
- la fonction inverse

Attention ! Une fonction continue sur son domaine de définition n'est pas forcément continue dans $\mathbb{R}$. Par exemple, la fonction inverse est continue sur son domaine de définition, mais pas dans $\mathbb{R}$.

Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions partout continues sont partout continues.

Exemple : La fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1;1]$ c'est-à-dire sur son domaine de définition. Elle est donc partout continue.



3. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f(x) = x^5 + x^3 + 1$.

- (1) Calcule les images de 0 et de -1 .
- (2) Y a-t-il une racine de f dans l'intervalle $] -1; 0[$?
- (3) Calcule $f(-0,5)$. Déduis-en un intervalle, plus petit que le précédent, qui contienne une racine de f . Déduis-en un procédé pour déterminer une racine de f à un dix millièmes près.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

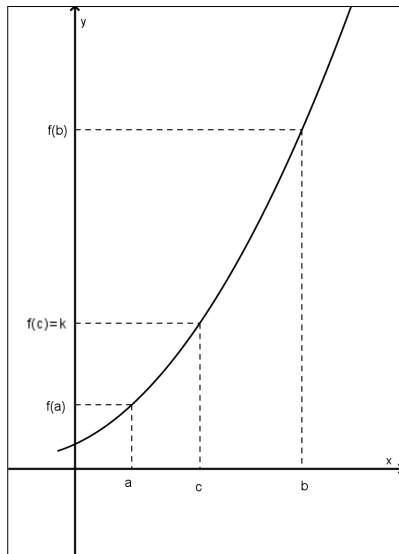
Soient a, b appartenant à I tels que $a < b$.

Si (1) f est continue sur $[a; b]$

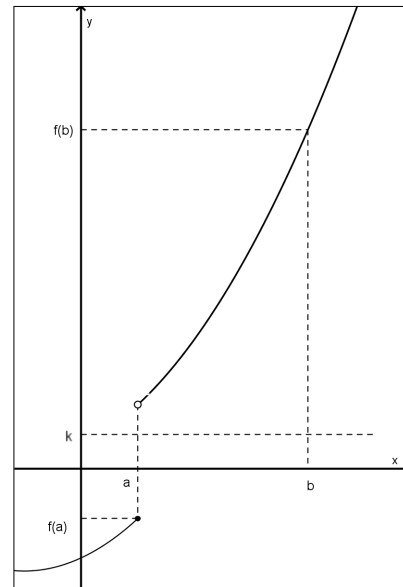
(2) $f(a) < k < f(b)$ ou $f(a) > k > f(b)$

alors il existe au moins un réel c appartenant à $]a; b[$ tel que $f(c) = k$.

La droite $y = k$ coupe le graphique de la fonction f en au moins un point.



Le théorème ne serait plus vrai si l'on n'exigeait pas que la fonction f soit continue sur $[a; b]$, ni même si l'on n'exigeait que la continuité de f sur $]a; b[$.



Par contre, le théorème reste vrai si, à la dernière ligne de l'énoncé, on remplace $]a; b[$ par $[a; b]$.

Lorsque $k = 0$, le théorème des valeurs intermédiaires affirme que la fonction f a au moins une racine dans l'intervalle $]a; b[$. Ce cas particulier, souvent appelé **théorème de Bolzano**, s'énonce comme suit.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soient a, b appartenant à $\text{dom } f$.

Si

(1) f est continue sur $[a; b]$

(2) $f(a) \cdot f(b) < 0$

alors il existe un nombre réel c appartenant à $]a; b[$ tel que $f(c) = 0$.



Le théorème des valeurs intermédiaires est utile pour prouver l'existence d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$ et dénombrer ces solutions.

Pour cela,

- on dresse le tableau de variation de la fonction
- on applique le théorème des valeurs intermédiaires à chaque intervalle où la fonction est strictement monotone.

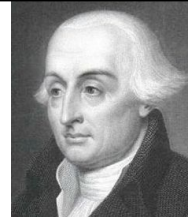
Exemple : Dénombrons les racines de la fonction $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 1$.

Exercice :

1. Dénombrer les racines de la fonction $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 4$.
2. Dénombrer les solutions de l'équation $x^5 - 20x^4 + 1 = 0$.
3. Démontrer que la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ admet une unique racine dans l'intervalle $[0;1]$.

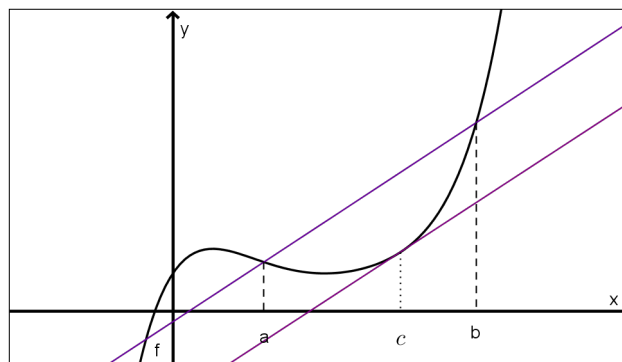
4. Théorème de Lagrange

Si une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ alors $\exists c \in]a;b[: f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

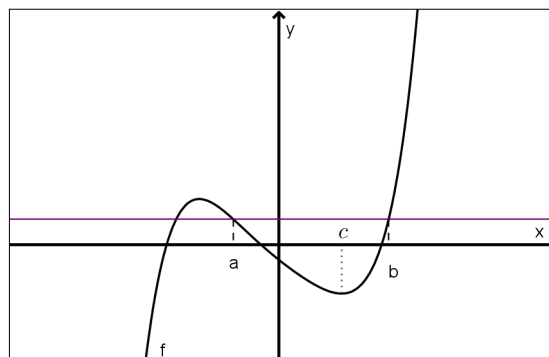


Ce théorème est admis sans démonstration.

Interprétation graphique : Sous les hypothèses données, il existe au moins un réel c de $]a;b[$ tel que la tangente au graphique de f au point $(c; f(c))$ soit parallèle à la droite passant par les points $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$.



Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.
Si $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a;b[: f'(c) = 0$.



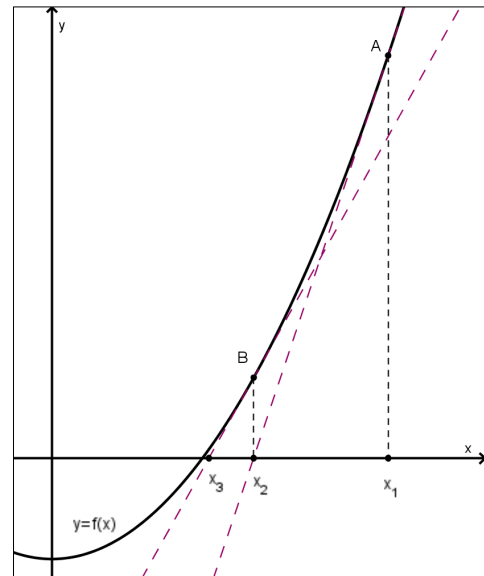
L. Applications de la dérivée

1. Calculer les racines d'une fonction

Dans cet exercice, on découvre la méthode de Newton-Raphson, qui permet généralement de déterminer, en quelques étapes, une racine d'une fonction dérivable.

Le graphique ci-contre permet de visualiser le processus : on cherche le point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $A(x_1; f(x_1))$.

Vérifions que $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

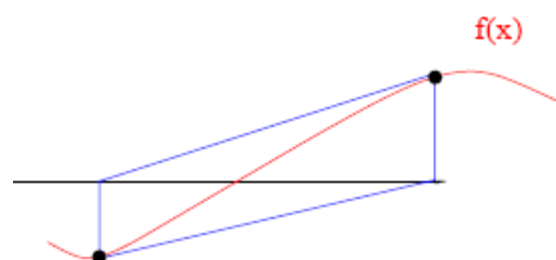
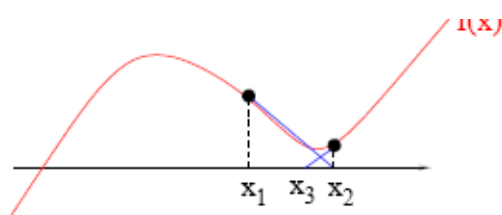


On répète le processus en considérant la tangente au point B , ce qui donne x_3 , et ainsi de suite...

On définit donc la suite (x_n) par récurrence par : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

La suite $x_1, x_2, x_3, \dots$ converge *généralement* vers la racine cherchée. On répète le procédé jusqu'à obtenir la valeur de la racine avec la précision demandée.

Lorsque l'on se trouve proche de la racine, la méthode de Newton-Raphson converge extrêmement vite. Toutefois, pour certains points de départ, la méthode diverge ou cycle. Les figures ci-dessous illustrent quelques mauvais cas qui peuvent se produire. Dans le cas de plusieurs racines pour f , il n'est, en général, pas évident de savoir, a priori quels points de départ convergeront vers quelles racines.



Exemple : Déterminons, avec 4 décimales exactes, la racine de la fonction $f(x) = x^3 - 2x - 5$ sur l'intervalle $[2;3]$.

Cette fonction polynôme est partout dérivable ; elle s'annule entre 2 et 3 car les images de ces deux réels sont de signes opposés : $f(2) = -1$ et $f(3) = 16$.

On calcule la dérivée de f : $f'(x) = 3x^2 - 2$.

$$\text{Ainsi } x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}.$$

On choisit le premier terme : $x_1 = 3$.

On obtient alors successivement les nombres suivants :

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2,36, \quad x_3 = 2,127197, \quad x_4 = 2,095136, \quad x_5 = 2,094552, \quad x_6 = 2,094551$$

La racine de la fonction est donc estimée à 2,0945.



On utilisera la mémoire de la calculatrice pour se faciliter la tâche.

Exercices :

1. Détermine les racines des fonctions suivantes avec une précision d'au moins 5 décimales exactes.

(1) $f(x) = x^3 - x - 1$ sur l'intervalle $[1;2]$

(2) $f(x) = x^3 + 3x + 1$ sur l'intervalle $[-1;0]$

(3) $f(x) = x - \cos x$ sur l'intervalle $[0;1]$

2. Détermine la racine négative, avec 5 décimales exactes, de la fonction $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 2$. Utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour repérer cette racine et choisir l'intervalle qui te permettra de commencer les calculs.

2. Etude de fonctions

Etudie chaque fonction et réalise son graphique :

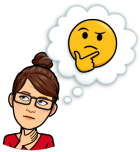
$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

$$(3) f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$$(2) f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$(4) f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

Pour chercher :



(1) Etudie la fonction $f(x) = \frac{x^3}{a(x^2 - a^2)}$ où a est un réel non nul.

En particulier, détermine

- (1) le domaine de définition de f
- (2) les équations des éventuelles asymptotes
- (3) croissance / décroissance / extrema
- (4) concavité / points d'inflexion

Esquisse le graphe de f .

(2) En ajustant la valeur du paramètre a , détermine une fonction $g(x)$ définie sur $] -1; 1[$, possédant des asymptotes verticales en -1 et 1 , dont la dérivée est donnée par la fonction $f(x)$ de la question 1 et telle que $g(0) = 1$.

(d'après *Examen d'admission, ULg, 2001*)

3. Problèmes d'optimisation

Dans beaucoup d'applications, les grandeurs physiques ou géométriques sont exprimées à l'aide d'une formule contenant une fonction. Il peut s'agir de la température d'un corps en fonction du temps, du volume d'un gaz dans un ballon en fonction du rayon du ballon, de la vitesse d'un mobile en fonction du temps, ...

Disposant de cette fonction, sa dérivée pourra nous être utile pour déterminer ses valeurs extrêmes. Déterminer ces valeurs constitue ce qu'on appelle un *problème d'optimisation*.

Exercices :



1. Les organisateurs d'une foire étudient sa fréquentation afin d'optimiser le temps d'attente aux caisses.

La billetterie est ouverte chaque jour de 10 heures à 20 heures.



Le nombre de visiteurs varie suivant le moment de la journée et peut être modélisé par la fonction $f(x) = x^3 - 45x^2 + 663x - 2700$ où x , en heures, appartient à l'intervalle $[10; 20]$. A quel moment de la journée y a-t-il le plus de visiteurs ?

2. La température journalière moyenne d'une ville, en degrés Fahrenheit, est donnée par

$$T = 55 - 21 \cdot \cos \frac{2\pi(t-32)}{365} \text{ où } t \text{ est le temps en jours, avec } t=1 \text{ correspondant au 1}^{\text{er}}$$

janvier. Détermine la date

- (1) du jour le plus chaud ;
- (2) du jour le plus froid.

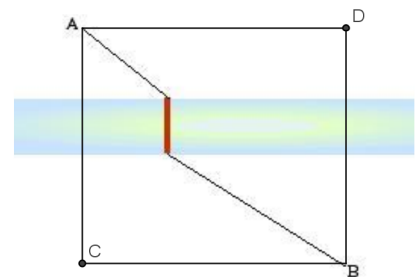
3. Une bouée munie d'une cloche flotte à la surface de l'océan. La hauteur h (en mètres)

de la bouée varie selon la règle $h(t) = 0,5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}(t-2)\right) + 2,5$ où t représente le temps (en secondes).

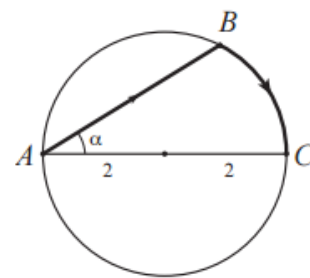
La cloche sonne chaque fois que la bouée se trouve sur la crête d'une vague.

Combien de fois par minute entend-on la cloche sonner ?

4. Avec un fil de fer de 40 cm de long, on peut créer une infinité de rectangles. Quel est celui qui a l'aire maximale ?
5. Une cartonnerie fabrique des emballages en forme de parallélépipède rectangle à base carrée. Pour être suffisamment maniables, les paquets doivent répondre à deux conditions :
- la hauteur ne peut être supérieure à 200 cm ;
 - la somme de la hauteur et du périmètre de la base doit être égale à 360 cm.
- (1) Détermine les dimensions du paquet de volume maximum.
- (2) Quel est ce volume maximum ?
6. Partage le nombre 120 en deux parties de telle sorte que le produit de l'une des parties par le carré de l'autre soit maximum.
7. Sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 16$, on considère le point $A(4;0)$ et deux points B et C de même abscisse x . Pour quelle valeur de x , l'aire du triangle ABC est-elle maximale ? (ULB, 2012)
8. Deux maisons A et B sont situées de part et d'autre d'une rivière. On veut construire un pont, perpendiculairement aux berges, de façon à ce que la distance à parcourir entre les deux maisons soit la plus courte possible. Détermine le meilleur emplacement du pont sachant que $\overline{AD} = \overline{AC} = 10$ m, que la rivière fait 1 m de large et qu'elle est située à 3 m du point A.

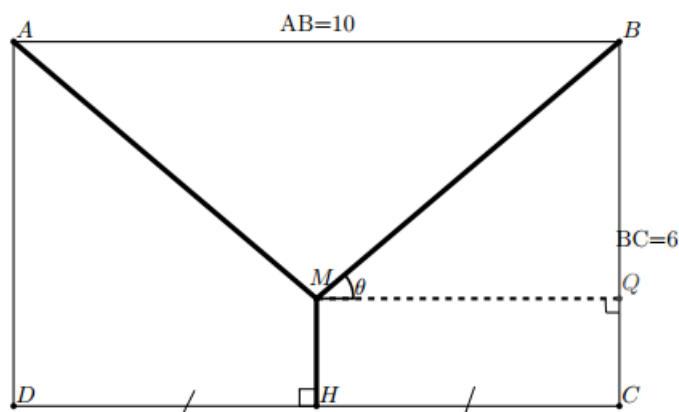


9. Adrien part du point A situé au bord d'un lac circulaire de 2 km de rayon et veut atteindre le point C diamétralement opposé le plus rapidement possible. Il peut aller à pied à la vitesse de 4 km/h ou en barque à la vitesse de 2 km/h. Sous quel angle α par rapport au diamètre doit-il orienter sa barque ?



10. Un particulier (matheux) décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

On donne ci-dessous le plan de cette façade ainsi que quelques dimensions, exprimées en mètres.

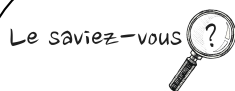


$[AM]$ et $[BM]$ représentent les deux premiers tuyaux.

$[MH]$ représente le tuyau vertical.

MH est la médiatrice de $[DC]$.

On souhaite trouver la position du point M qui permet de minimiser la longueur totale des tuyaux. On note Q le projeté orthogonal de M sur $[BC]$. La variable est la mesure en radian de l'angle $\widehat{BMQ} = \theta$.



Les mathématiques évoluent : nombre de résultats ont été prouvés au fil de l'Histoire, mais beaucoup résistent et d'autres questions émergent.

En 1900, David Hilbert (1862-1943) dresse une liste de 23 problèmes pour les générations à venir.

En 2000, l'Institut de mathématiques Clay, reprenant l'idée, sélectionne sept autres problèmes parmi lesquels se trouve l'existence de solutions aux équations aux dérivées partielles de Navier-Stokes qui décrivent les mouvements des fluides.

Un million de dollars est offert pour chaque résolution et, en 2019, six des sept problèmes ne sont toujours pas résolus.

The Navier-Stokes equations are then given by

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u_i + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0),$$

$$(2) \quad \operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)$$

with initial conditions

$$(3) \quad u(x, 0) = u^0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

PES :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes x et y , on considère le point $P(2;4)$.

Détermine l'équation de la droite de coefficient angulaire négatif et passant par P qui délimite avec les axes x et y une surface d'aire minimal.

(ULB, 2017)



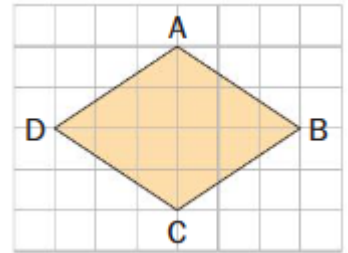
Pour chercher :

1. $ABCD$ est un losange de périmètre p .

On note x la longueur d'une diagonale de ce losange.

Détermine les dimensions du losange pour que son aire soit maximale.

Sol :



2. Sangaku (énigme japonaise)

$ABCD$ est un carré de côté 1. E et F sont deux points de la diagonale $[AC]$. Les cercles $\mathcal{C}_1$ de centre E et $\mathcal{C}_2$ de centre F sont tangents entre eux et tangents à chacun des deux côtés du carré.

Quelles sont les positions des points E et F et les rayons respectifs de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ pour que la somme des aires des deux cercles soit maximale ?

Sol :

