

H. Exercices variés



<https://bit.ly/3gMvIE9>

1. Calcule $f'(x)$ sachant que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$(1) f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (2) f(x) = \frac{a}{x} \quad (3) f(x) = (ax + b)(cx + d)$$

2. Calcule la dérivée seconde de

$$(1) f(x) = 3x - 2 \quad (4) f(x) = \sqrt{x} \\ (2) f(x) = \frac{1}{x} \quad (5) f(x) = \frac{x+1}{x} \\ (3) f(x) = x^3 + 3x$$



La dérivée seconde de f se note f'' et se calcule en dérivant la dérivée de f :

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

3. Détermine une équation réduite de la tangente au graphique de $f(x)$ en son point d'abscisse a .

$$(1) f(x) = 2x^2 - 5x \quad a = 1$$

$$(2) f(x) = \tan x \quad a = \frac{\pi}{4}$$

$$(3) f(x) = \frac{x+1}{x^2 - x + 1} \quad a = 0$$

$$(4) f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad a = \frac{\pi}{2}$$

$$(5) f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1 \quad a = -2$$

Pour cet exercice, représente la fonction et la tangente.



Rappel : Pour tracer le graphique d'une parabole $y = ax^2 + bx + c$, on utilise sa forme canonique $y = a(x - m)^2 + p$ (avec $m = -\frac{b}{2a}$ et $p = -\frac{\Delta}{4a}$) et les manipulations graphiques.

4. Détermine le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \sqrt{x-1}$

(3) $f(x) = (x+2)^{\frac{1}{3}}$

(2) $f(x) = (x+2)^{\frac{1}{6}}$

(4) $f(x) = \sqrt[4]{x^2+5x+6}$

5. La fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ est-elle dérivable en 0 ? Justifie ta réponse.

6. Détermine l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \frac{1}{x-1} + 1$ au point d'abscisse 2. Trace ensuite la courbe et la tangente.

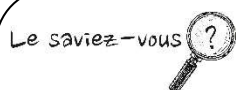
7. Soit $f(x) = ax^2 + bx$; trouve les valeurs de a et b sachant que $f(-1) = 5$ et la pente de la tangente en $x = 1$ est 7.

8. Pour quelles valeurs de x , la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = (x-3)(x+3)^2$ est-elle horizontale ?

9. Calcule les dérivées à droite et à gauche de 5 de la fonction $f(x) = |x-5|$ pour montrer qu'elle n'est pas dérivable en 5.

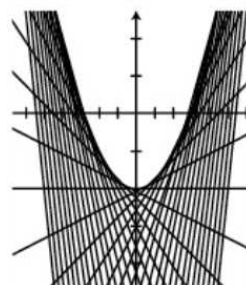
 $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

10. Détermine les coordonnées de tous les points de la courbe de la fonction $f(x) = (x^2 - 2)(2x + 1)$ en lesquels la pente de la tangente vaut -2 .



Le mot « tangente » provient du latin tangere qui veut dire toucher.

C'est pourquoi, autrefois, on appelait poétiquement « touchante » une droite tangente à une courbe.



Pour chercher :

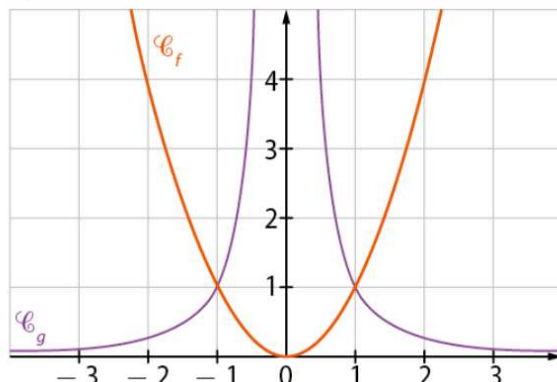
1. On considère les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$ représentées ci-dessous.

(1) Détermine une équation réduite de la tangente T_a en f au point d'abscisse a .

(2) Détermine une équation réduite de la tangente T'_a en g au point d'abscisse a .

(3) Détermine toutes les valeurs de a pour lesquelles T_a et T'_a sont perpendiculaires.

Sol : $a = -2$ et $a = 2$



2. On note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de la fonction carrée.

Soit A et B deux points distincts de cette parabole et t_A et t_B les tangentes à la parabole aux points A et B .

(1) Démontre que t_A et t_B sont sécantes.

On note C le point d'intersection des tangentes et D le point de la parabole ayant la même abscisse que C .

(2) Détermine l'équation de la tangente à la parabole $\mathcal{P}$ au point D (cette équation s'exprimera en fonction des abscisses des points C et D).

(3) Conjecture le rapport des aires des triangles ABC et ABD .

3. Une parabole a pour tangentes les droites $d_1 \equiv y = 4x - 4$, $d_2 \equiv y = 2x - 3$ et $d_3 \equiv y = -2x - 7$.

Détermine une équation de cette parabole.

Sol : $P \equiv y = x^2 + 2x + 5$

4. Existe-t-il une tangente à la courbe d'équation $y = \frac{2x}{x-1}$ qui passe par le point de coordonnées $(-2; -1)$?

Sol : Non, mais il faut le prouver...

5. Détermine l'équation de deux droites passant par le point $(1; -5)$ et qui sont tangentes au graphe de la fonction $f(x) = x^2 - 2$.