UAA 4 : La dérivée
Solutions

H. Exercices variés

1. Calcule $f'(x)$ sachant que $a,b,c,d \in \mathbb{R}$:

   (1) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

   $\boxed{f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c}$

   (2) $f(x) = \dfrac{a}{x}$

   $\boxed{f'(x) = \dfrac{-a}{x^2}}$

   (3) $f(x) = (ax+b)(cx+d)$

   $\boxed{f'(x) = 2acx + ad + bc}$

2. Calcule la dérivée seconde de

   (1) $f(x) = 3x - 2$

   $\boxed{f''(x) = 0}$

   (2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   $\boxed{f''(x) = \dfrac{2}{x^3}}$

   (3) $f(x) = x^3 + 3x$

   $\boxed{f''(x) = 6x}$

   (4) $f(x) = \sqrt{x}$

   $\boxed{f''(x) = \dfrac{-1}{4\sqrt{x^3}}}$

   (5) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$

   $\boxed{f''(x) = \dfrac{2}{x^3}}$

3. Détermine une équation de la tangente au graphique de $f(x)$ en son point d'abscisse a.

   (1) $f(x) = 2x^2 - 5x$ $\quad a = 1 \quad$ $\boxed{T \equiv y = -x - 2}$

   (2) $f(x) = \tan x$ $\quad a = \dfrac{\pi}{4} \quad$ $\boxed{T \equiv y = 2x + 1 - \dfrac{\pi}{2}}$

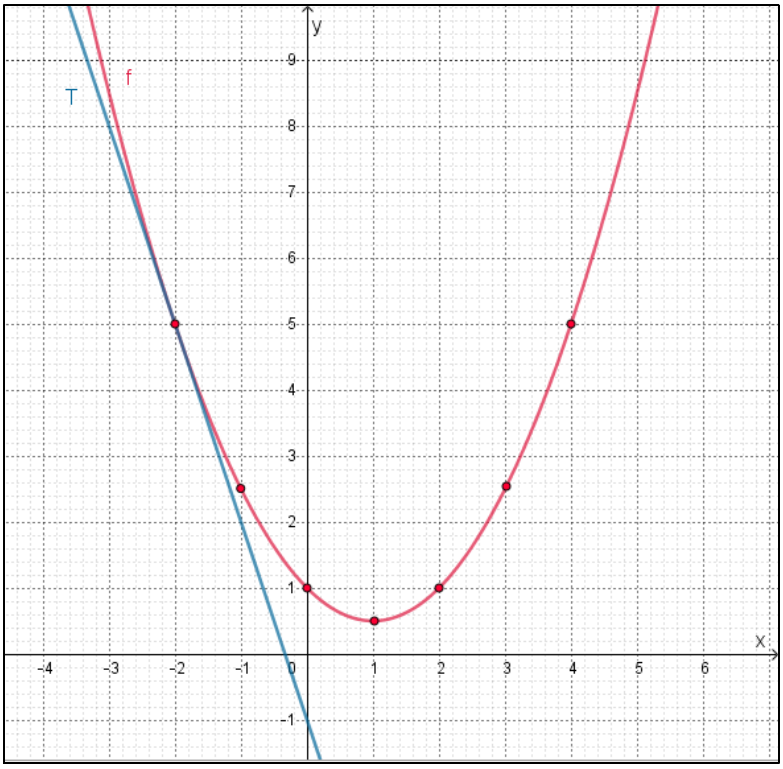
(3) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$ $\quad a=0$ $\quad \boxed{T \equiv y=2x+1}$

(4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ $\quad a=\dfrac{\pi}{2}$ $\quad \boxed{T \equiv y=\dfrac{-4}{\pi^2}x+\dfrac{4}{\pi}}$

(5) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+1$ $\quad a=-2$ $\quad$ Pour cet exercice, représente la fonction et la tangente.

$\boxed{T \equiv y=-3x-1}$

Pour les manipulations : $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{2}$



4. Détermine le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes :

(1) $f(x)=\sqrt{x-1}$ $\quad dom_d f =]1;+\infty[$

(2) $f(x)=(x+2)^{\frac{1}{6}}$ $\quad dom_d f =]-2;+\infty[$

(3) $f(x)=(x+2)^{\frac{1}{3}}$ $\quad dom_d f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

(4) $f(x)=\sqrt[4]{x^2+5x+6}$ $\quad dom_d f =]-\infty;-3[\cup]-2;+\infty[$

5. La fonction $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ est-elle dérivable en 0 ? Justifie ta réponse.

Une fonction est dérivable en x si elle admet un nombre dérivé (nombre réel !) en x.

Comme $f'(0)$ n'existe pas, f n'est pas dérivable en 0.

6. Détermine l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x-1}+1$ au point d'abscisse 2. Trace ensuite la courbe et la tangente.

$T \equiv y=-x+4$

7. Soit $f(x)=ax^2+bx$; trouve les valeurs de a et b sachant que $f(-1)=5$ et la pente de la tangente en $x=1$ est 7.

$a=4$ et $b=-1$

8. Pour quelles valeurs de x, la tangente à la courbe de la fonction $f(x)=(x-3)(x+3)^2$ est-elle horizontale ?

$x=-3$ et $x=1$

9. Calcule les dérivées à droite et à gauche de 5 de la fonction $f(x)=|x-5|$ pour montrer qu'elle n'est pas dérivable en 5.

$\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}=1$ et $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}=-1$

Comme les nombres dérivés à gauche et à droite de 5 sont différents, la fonction n'est pas dérivable en 5.

10. Détermine les coordonnées de tous les points de la courbe de la fonction $f(x)=(x^2-2)(2x+1)$ en lesquels la pente de la tangente vaut -2.

Les points recherchés sont $(0{,}43;-3{,}38)$ et $(-0{,}77;0{,}76)$.