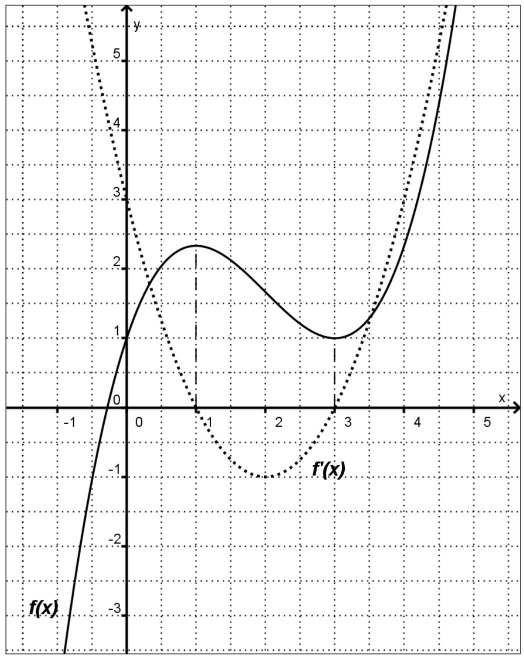
I. Dérivée première et croissance d'une fonction

1. Pour découvrir

On donne, dans un même repère, les graphiques de la fonction $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ et de sa dérivée $f'(x)=x^2-4x+3$.



(1) Vérifie que $f'(x)$ est l'expression de la dérivée de la fonction f.

(2) Complète le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
Signe de f'				
Croissance de f				

Quelle correspondance peut-on établir entre la croissance de la fonction f et le signe de f' ?

2. Synthèse

L'étude du ……………… de la dérivée d'une fonction permet de connaître le ……………… …………………… de cette fonction.

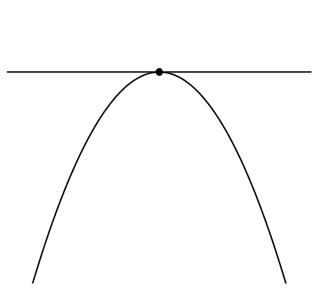
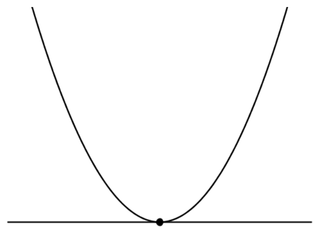
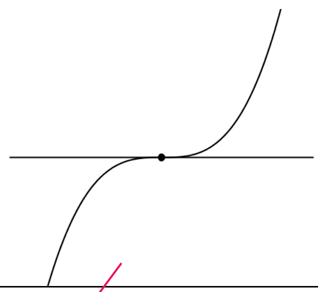
Si $f'(x)>0$ sur un intervalle, alors f est ***croissante*** $(\nearrow)$ sur cet intervalle.

Si $f'(x)<0$ sur un intervalle, alors f est ***décroissante*** $(\searrow)$ sur cet intervalle.

Propriété : Condition *suffisante* pour être un extremum local :

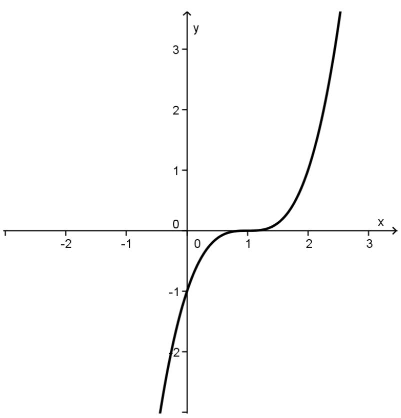
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert contenant a. Si $f'(a)=0$ et change de signe de part et d'autre de a, alors f admet un ***extremum*** local en $x=a$.

Lorsque la dérivée s'annule et change de signe, la tangente est horizontale et la courbe présente un **point stationnaire** qui peut être :

un maximum local	**un minimum** local	**un point d'inflexion** (ni maximum, ni minimum)
		

La dérivée peut s'annuler en $x=a$ sans changement de signe. Ce point $(a;f(a))$ n'est pas un maximum ou un minimum.

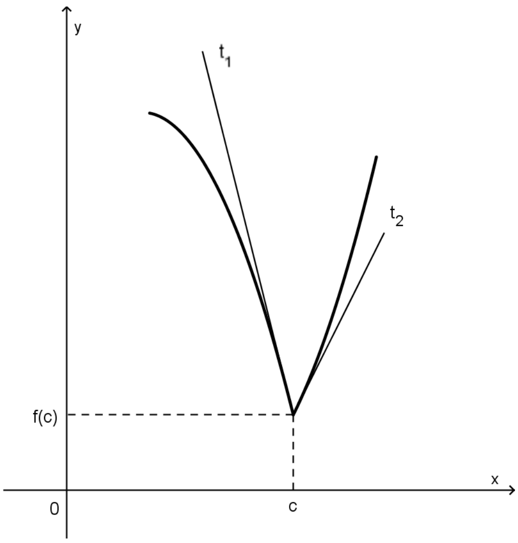
Exemple : Considérons la fonction $f(x)=(x-1)^3$ dont la dérivée $f'(x)=3.(x-1)^2$ s'annule pour $x=1$ et est toujours positive. Cette fonction ne présente pas d'extremum pour $x=1$; il s'agit d'un point d'inflexion.



x		1	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	0 Point à tangente horizontale	↗

La propriété précédente est une condition suffisante : une extrémité d'un intervalle fermé peut fournir un extremum de même qu'un point où la fonction n'est pas dérivable (comme un point de rebroussement ou un point anguleux)

Exemples :

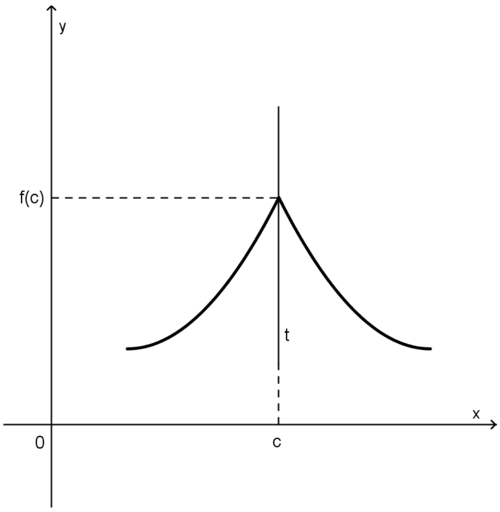


$\left(c; f\left(c\right)\right)$ est un **point anguleux**.

La dérivée n'existe pas en c, mais elle change de signe.

Le graphique de f admet deux demi-tangentes distinctes.

f a un **minimum** en c.



$\left(c; f\left(c\right)\right)$ est un **point de rebroussement**.

La dérivée n'existe pas en c, mais elle change de signe.

Le graphique de f admet une tangente verticale.

f a un **maximum** en c.

4. Mode opératoire pour rechercher les extremums d'une fonction

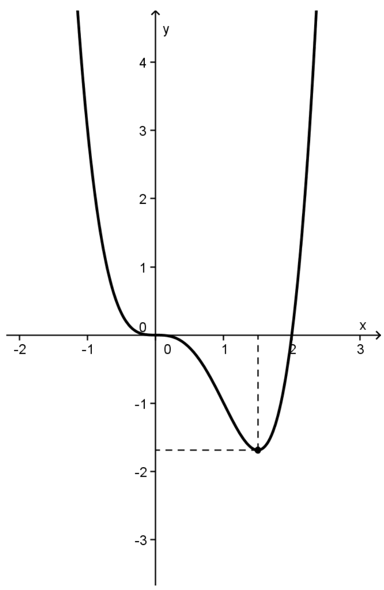
1. Calculer $f'(x)$.

2. Etablir le tableau de signe de $f'(x)$.

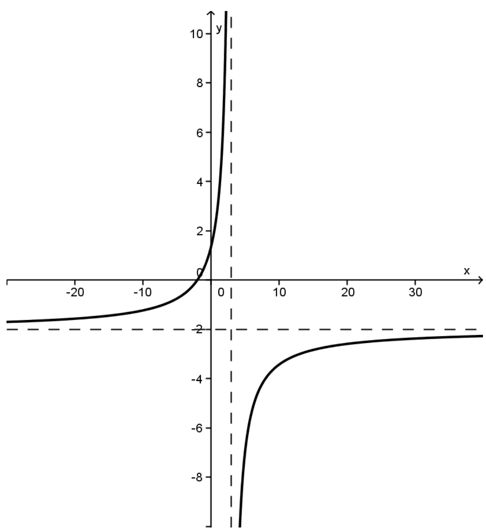
3. De ce tableau, en déduire les variations de f (croissance et/ou décroissance) ainsi que les éventuels extremums, en calculant leurs coordonnées.

<u>Exemples :</u>

(1) Recherchons les extremums de la fonction $f(x) = x^4 - 2x^3$.



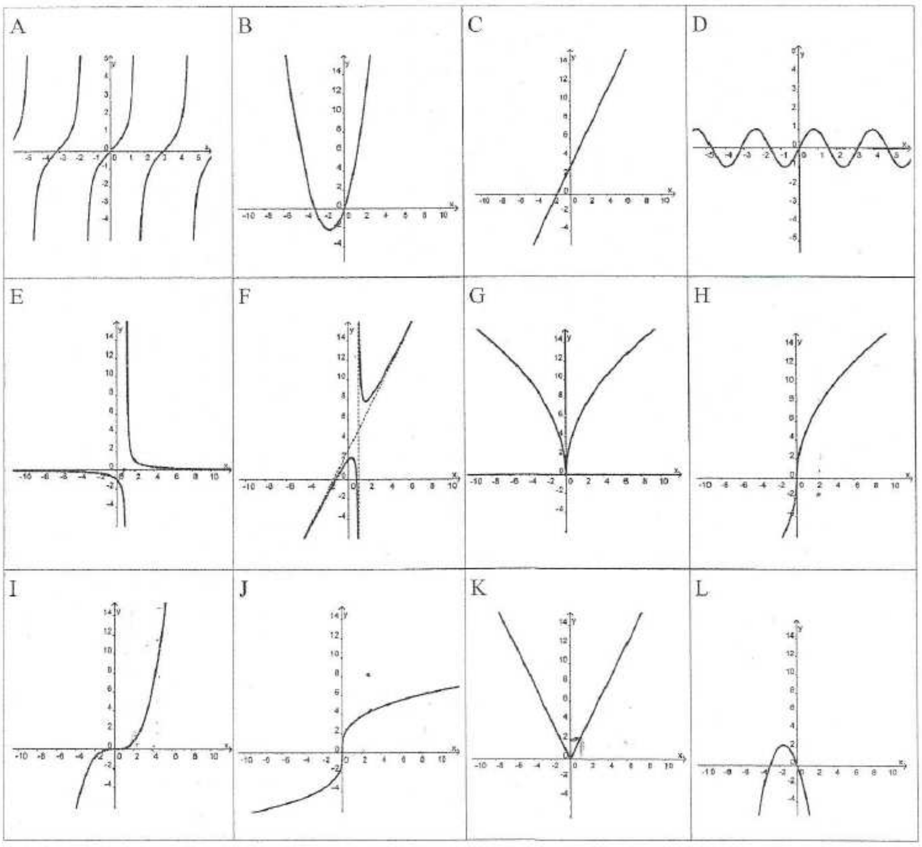
(2) Recherchons les extremums de la fonction $f(x) = \dfrac{2x+4}{3-x}$.

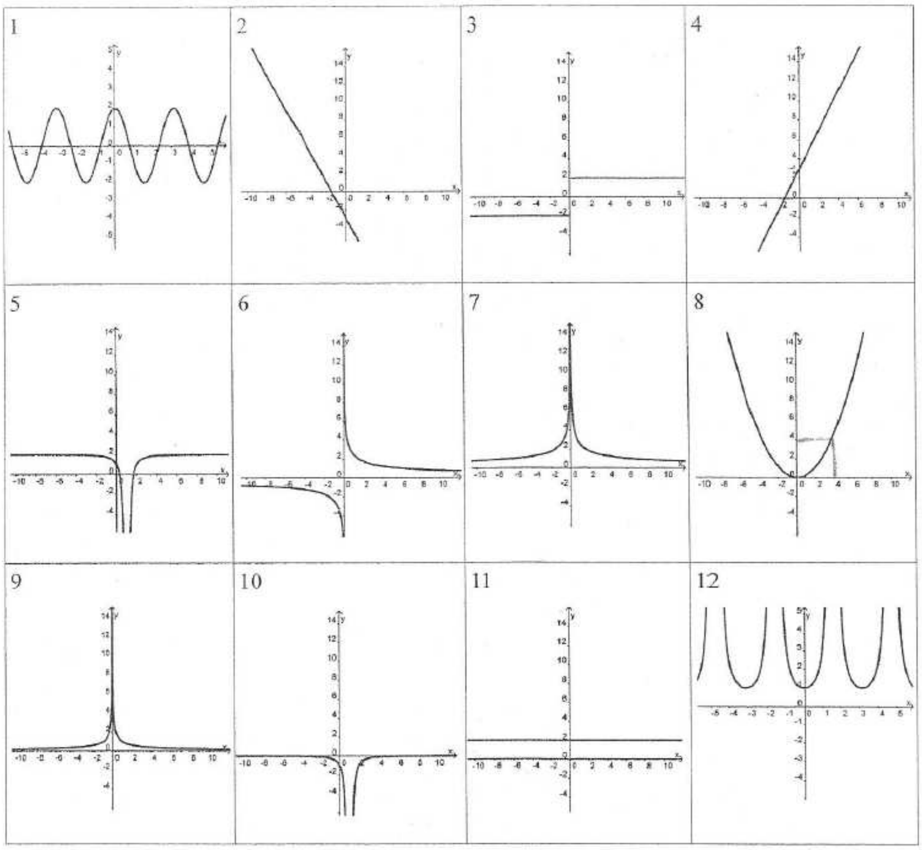


5. Exercices

https://bit.ly/3gWkl7h

1. Voici les graphiques de 12 fonctions (graphiques A à L) et de leurs dérivées (graphiques 1 à 12). Associe chaque fonction à sa dérivée.





2. Détermine les extremums éventuels des fonctions suivantes :

   (1) $f(x) = (x-1)^2 (2x+3)$

   (2) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

   (3) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$

   (4) $f(x) = x^2 \left(3x^2 + 2x - 3\right)$

   (5) $f(x) = x^6 + x^4$

   (6) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$

3. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   (1) Détermine son domaine.

   (2) Détermine les éventuelles asymptotes verticales et horizontales.

   (3) Détermine les variations de *f*.

   (4) Trace une esquisse du graphique de la fonction.

4. Détermine les coordonnées des extremums de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{2} - \sin x$ sur l'intervalle $]-\pi;\pi[$.

5. On donne la fonction $f(x) = ax + b + \dfrac{1}{x}$. Détermine *a* et *b* de sorte que $f(x)$ ait un maximum en $(-1;-5)$.

6. La figure ci-contre représente le profil d'un toboggan destiné à de jeunes enfants. La hauteur du toboggan est de 2 mètres et sa longueur de 4 mètres. Pour des raisons de sécurité, les pentes au départ et à l'arrivée doivent être horizontales.
   Détermine l'expression d'une fonction du 3ème degré dont le graphique donne l'allure du toboggan ; cette fonction doit vérifier les contraintes de sécurité.