J. Dérivée seconde et concavité d'une fonction

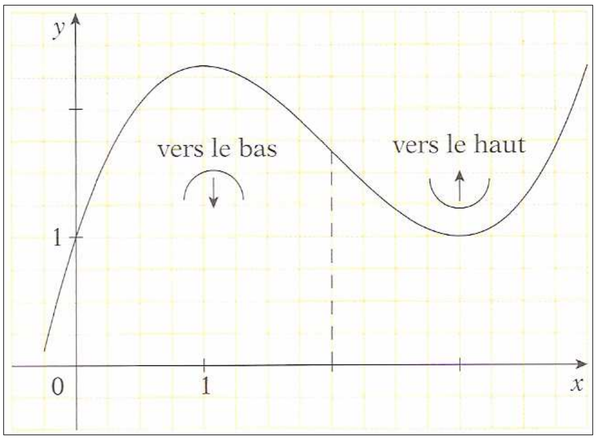
1. Pour découvrir

Une courbe peut tourner sa **concavité vers le haut** ou **vers le bas**.

Précise la position des tangentes par rapport à la courbe :

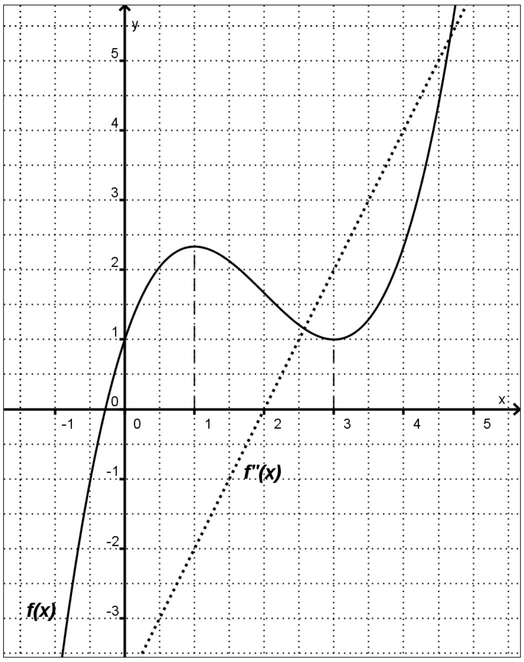
(1) lorsque la concavité est tournée vers le bas ;

(2) lorsque la concavité est tournée vers le haut.



La figure ci-contre montre, dans un même repère, les graphiques de $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ et de $f''(x)=2x-4$.

(1) Vérifie que $f''(x)$ est la dérivée de $f'(x)$. On appelle $f''(x)$ la **dérivée seconde** de la fonction $f(x)$.



(2) Complète le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
Signe de f''	
Concavité de f	

Quelle correspondance peut-on établir entre le sens de la concavité de la courbe $y=f(x)$ et le signe de f'' ?

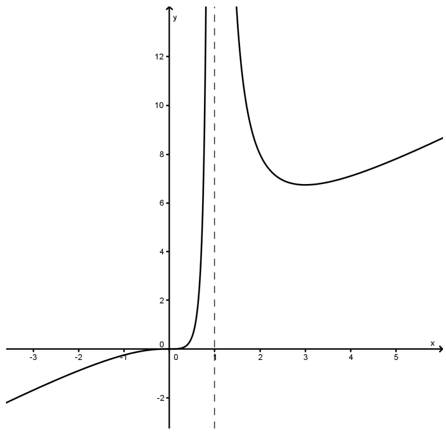
2. Synthèse

La **<u>dérivée seconde</u>** d'une fonction est la dérivée de la dérivée première : $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

L'étude du ……………… de la dérivée seconde d'une fonction permet de connaître le ……...
……………………………. de cette fonction.

Si $f''(x) > 0$ sur un intervalle, alors f tourne sa ***concavité vers le haut*** sur cet intervalle.
Si $f''(x) < 0$ sur un intervalle, alors f tourne sa ***concavité vers le*** bas sur cet intervalle.
Si $f''(x) = 0$ en un point et si f'' change de signe en ce point, alors ce point est un ***point d'inflexion***. Il s'agit donc d'un point où la concavité change de sens.

<u>Exemple :</u> Etudions la concavité de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.



3. Mode opératoire pour rechercher les points d'inflexion d'une fonction

1. Calculer $f''(x)$.

2. Etablir le tableau de signe de $f''(x)$.

3. De ce tableau, en déduire la concavité de f (vers le haut et/ou vers le bas) ainsi que les éventuels points d'inflexion, en calculant leurs coordonnées.

4. Exercices

https://bit.ly/34L8RkN

1. Détermine les coordonnées des éventuels points d'inflexion des fonctions suivantes :

   (1) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-x^3$

   (2) $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+x^2-4x-3$

   (3) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

2. Recherche la valeur des paramètres m et p si la fonction $f(x)=x^3+2mx^2-3px+1$ admet un point d'inflexion en $(1;-4)$.

3. Soit la fonction $f(x)=x^3+3ax^2+a^3$ où $a>0$.

   (1) Détermine les coordonnées des extremums ; précise s'il 'agit d'un maximum ou d'un minimum.

   (2) Détermine les coordonnées des points d'inflexion du graphique de f.

   (3) Pour quelle(s) valeur(s) de a le graphique de f a-t-il un point d'inflexion où la pente de la tangente vaut -3 ?