K. Dérivabilité et continuité

1. Fonction continue

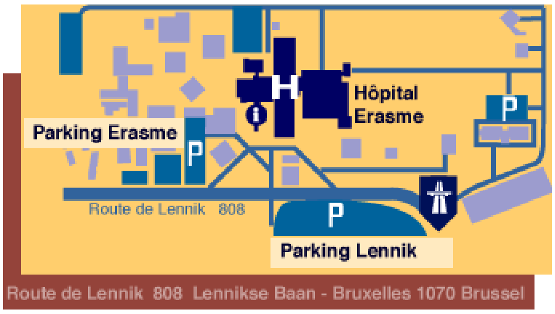
(1) Une fonction discontinue

La notion de continuité est d'une grande importance en analyse car la dérivée ainsi que plusieurs règles tirées du calcul différentiel ne prennent leur sens que sur les fonctions continues.

L'adjectif continu a, en mathématiques, une signification très rapprochée de son sens courant. Par exemple, lorsque nous disons d'une personne qu'elle parle continuellement, nous voulons dire qu'elle parle d'une façon ininterrompue. Par analogie, nous dirons qu'intuitivement une fonction est continue en une valeur donnée de son domaine si son graphique est ininterrompu de part et d'autre de cette valeur. Aucun saut, aucune interruption, aucune irrégularité ne doit être noté autour de cette valeur.

En voici un exemple. Les tarifs du parking "Lennik" de l'hôpital Erasme sont donnés dans le tableau qui suit :

Durée (t) en heures	Prix $P(t)$ en euros
1	1,40
2	2,80
3	4,10
4	4,30
5	4,70
6	5
7 à 24	5,20

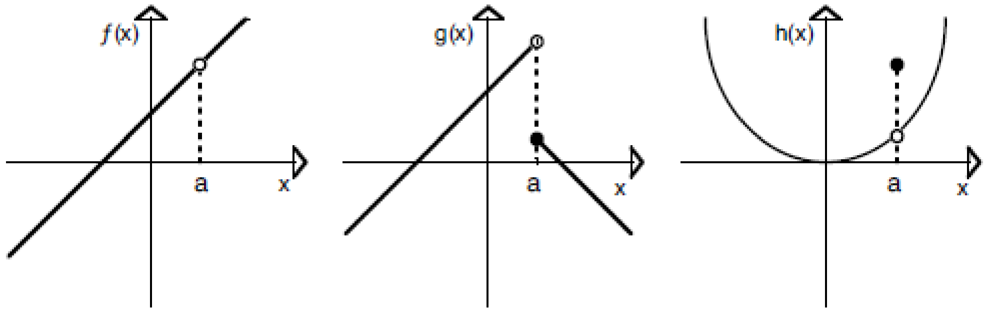


(1) Trace le graphique de la fonction $P(t)$ donnant le prix à payer (en €) en fonction de la durée de parking t (en heures).

(2) Ecris, en termes de limites, le comportement de la fonction quand t tend vers 2, quand t tend vers 4, et quand t tend vers 4,3.

(2) Définition de continuité

Prenons à présent les fonctions définies par les graphiques suivants :



Les trois graphiques sont "brisés" lorsque $x = a$:

- a n'appartient pas au domaine de définition de la première fonction ;
- la deuxième fonction subit un saut brusque lorsque $x = a$;
- la troisième fonction présente une irrégularité de nature différente des 2 autres fonctions en $x = a$.

Mais dans les trois cas, nous dirons que la fonction n'est pas continue en $x = a$.

Evidemment, lorsque l'on connaît le graphique de la fonction, l'étude de continuité de cette fonction se fait en un clin d'œil. Mais généralement, le graphique nous est inconnu alors comment exprimer cette notion analytiquement ?

En utilisant la notion de limite !

Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et un réel a.

f est **continue en *a*** si et seulement si on vérifie successivement les deux critères suivants :

(1) $a \in dom\, f$

(2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Comment vérifier qu'une fonction est continue ?

Pour prouver que la fonction définie par $f(x) = 2x + 3$ est continue en 4 $(4 \in dom\, f)$, il faut établir que $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4) = 11$.

Pour ce faire, on ne peut pas se contenter de calculer cette limite de manière habituelle : $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (2x + 3) = 2.4 + 3 = 11$.

En procédant ainsi, on utilise le fait que la limite en 4 de la fonction est égale à l'image de 4 par cette fonction. Cela revient à postuler que la fonction est continue. Or, ici, c'est ce qu'il faut établir.

Pour démontrer que $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$, on utilise la définition de limite.

Sachant que $dom\, f = \mathbb{R}$, il faut établir que

(1) 4 adhère à $\mathbb{R}$

(2) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}_0^+)(\forall x \in \mathbb{R}) : |x-4| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(4)| < \varepsilon$

La première condition est vérifiée puisque $4 \in \mathbb{R}$.

La seconde condition peut s'écrire :

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}_0^+)(\forall x \in \mathbb{R}) : |x-4| < \delta \Rightarrow |2x+3-11| < \varepsilon$$

ou encore :

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}_0^+)(\forall x \in \mathbb{R}) : |x-4| < \delta \Rightarrow |2x-8| < \varepsilon .$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$. On doit trouver une valeur de δ telle que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : |x-4| < \delta \Rightarrow |2x-8| < \varepsilon$$
$$(\forall x \in \mathbb{R}) : |x-4| < \delta \Rightarrow 2.|x-4| < \varepsilon$$

Si on pose $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, on a

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : |x-4| < \delta \Rightarrow 2.|x-4| < 2.\delta = \varepsilon$$

En pratique, on détermine une valeur de δ, qui dépend généralement de ε. Cette valeur de δ permet de conclure.

Intuitivement une fonction est discontinue en une valeur donnée de sa variable indépendante lorsque pour cette valeur, le graphique de la fonction est marqué par une interruption sous forme de *trou*, de *saut*, *d'explosion* ou *par défaut* lorsque la fonction n'est pas définie autour de la valeur en question. En somme, lorsqu'on trace le graphique d'une fonction, on est en présence d'une discontinuité à chaque fois que l'on doit lever le crayon.

Certaines situations demanderont une plus grande précision. Même si une fonction n'est pas continue lorsque $x = a$, elle peut être continue *à droite en* $x = a$ ou *à gauche en* $x = a$.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

f est **continue à gauche en *a*** si et seulement si on vérifie successivement les deux critères suivants :

(1) $a \in dom\, f$

(2) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

f est **continue à droite en *a*** si et seulement si on vérifie successivement les deux critères suivants :

(1) $a \in dom\, f$

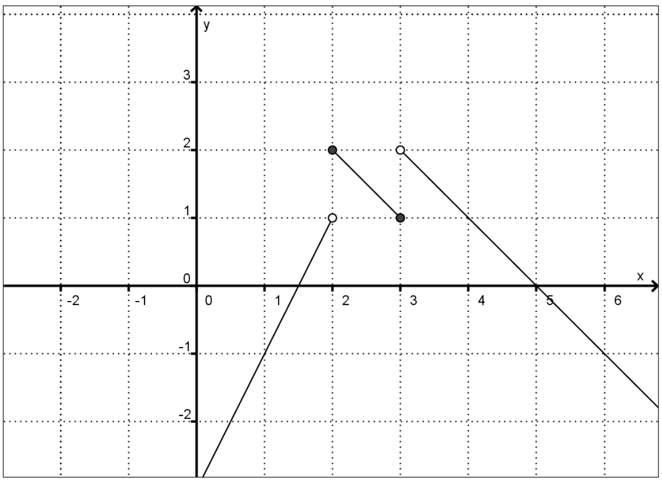
(2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Exemple :

La fonction

$$f : x \to \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 2 \\ -x+4 & \text{si } 2 \le x \le 3 \\ -x+5 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

est continue à droite en 2 et continue à gauche en 3.



Exercices :

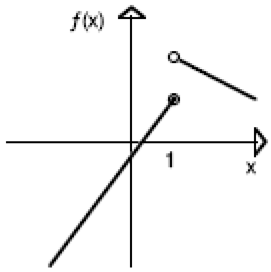
1. Dis si les fonctions associées aux graphiques suivants sont continues

   (1) à gauche en $x = 1$

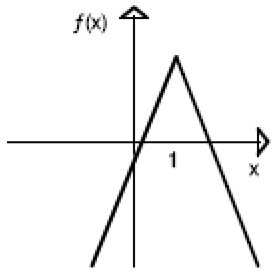
   (2) à droite en $x = 1$

   (3) pour $x = 1$

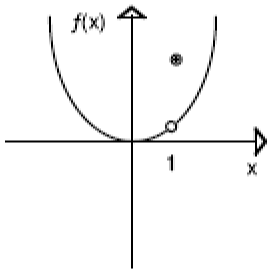
a)



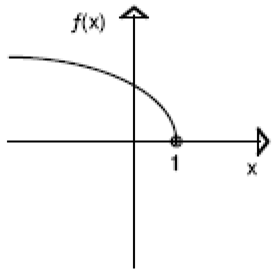
b)



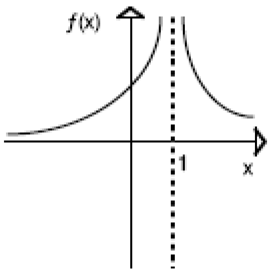
c)



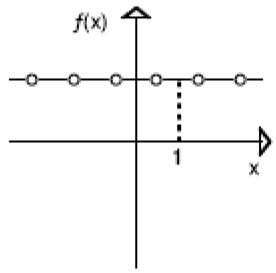
d)



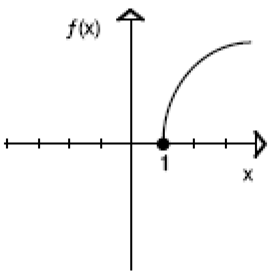
e)



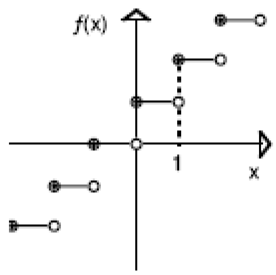
f)



g)



h)



2. Utilise le critère de continuité pour démontrer que les fonctions suivantes sont continues en a :

   (1) $f(x) = 4x - 1$ avec $a = 3$

   (2) $f(x) = x^2$ avec $a = 2$

3. Détermine si les fonctions ci-dessous sont discontinues pour la valeur de a donnée. Dessine le graphe de ces fonctions

   (1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} \end{cases}$ $\qquad a = -1$

   (2) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $\qquad a = 2$

   (3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} & \text{si } x < 1 \\ 1 - 3x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ $\qquad a = 1$

2. Continuité sur un intervalle

On dit qu'une fonction est **continue sur l'intervalle ouvert** $]a;b[$ si elle est continue en tout point de l'intervalle.

On dit qu'une fonction est **continue sur l'intervalle fermé** $[a;b]$ si elle est continue sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, si elle est continue à droite en $x = a$ et si elle est continue à gauche en $x = b$.

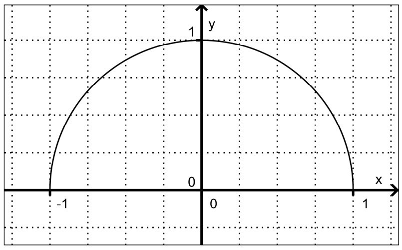
Toutes les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition :

- polynômiales (en ce compris les fonctions constantes et du premier degré)
- rationnelles
- racines $n^{\text{ème}}$
- trigonométriques et trigonométriques réciproques (ces fonctions seront étudiées en 6e)
- la fonction inverse

Attention ! Une fonction continue sur son domaine de définition n'est pas forcément continue dans $\mathbb{R}$. Par exemple, la fonction inverse est continue sur son domaine de définition, mais pas dans $\mathbb{R}$.

Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions partout continues sont partout continues.

<u>Exemple :</u> La fonction $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1;1]$ c'est-à-dire sur son domaine de définition. Elle est donc partout continue.



3. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f(x)=x^5+x^3+1$.

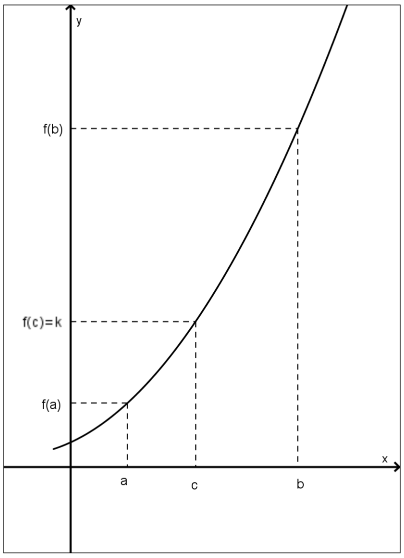
(1) Calcule les images de 0 et de -1.

(2) Y a-t-il une racine de f dans l'intervalle $]-1;0[$?

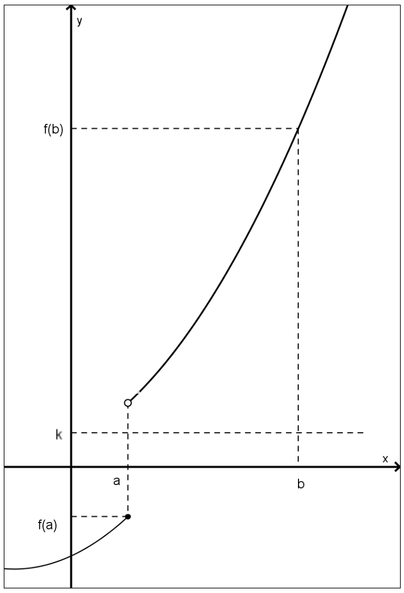
(3) Calcule $f(-0,5)$. Déduis-en un intervalle, plus petit que le précédent, qui contienne une racine de f. Déduis-en un procédé pour déterminer une racine de f à un dix millième près.

> Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
> Soient a, b appartenant à I tels que $a<b$.
> Si (1) f est continue sur $[a;b]$
> (2) $f(a)<k<f(b)$ ou $f(a)>k>f(b)$
> alors il existe au moins un réel c appartenant à $]a;b[$ tel que $f(c)=k$.

La droite $y = k$ coupe le graphique de la fonction f en au moins un point.



Le théorème ne serait plus vrai si l'on n'exigeait pas que la fonction f soit continue sur $[a;b]$, ni même si l'on n'exigeait que la continuité de f sur $]a;b[$.



Par contre, le théorème reste vrai si, à la dernière ligne de l'énoncé, on remplace $]a;b[$ par $[a;b]$.

Lorsque $k = 0$, le théorème des valeurs intermédiaires affirme que la fonction f a au moins une racine dans l'intervalle $]a;b[$. Ce cas particulier, souvent appelé **théorème de Bolzano**, s'énonce comme suit.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soient a, b appartenant à $dom\, f$.
Si

(1) f est continue sur $[a;b]$

(2) $f(a).f(b) < 0$

alors il existe un nombre réel c appartenant à $]a;b[$ tel que $f(c) = 0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires est utile pour prouver l'existence d'une solution d'une équation du type $f(x)=k$ et dénombrer ces solutions.

Pour cela,

- on dresse le tableau de variation de la fonction
- on applique le théorème des valeurs intermédiaires à chaque intervalle où la fonction est strictement monotone.

<u>Exemple :</u> Dénombrons les solutions de l'équation $x^4+3x^3+x^2+1=0$.

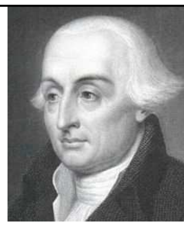
<u>Exercice :</u>

1. Démontre que la fonction $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$ admet une unique racine dans l'intervalle $[0;1]$.
2. Soit les fonctions $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+3$ et $g(x)=2x^3+5x^2-14x-1$. Montre que les graphiques de ces deux fonctions ont au moins un point d'intersection dont l'abscisse est strictement comprise entre -1 et 1.

4. Théorème de Lagrange

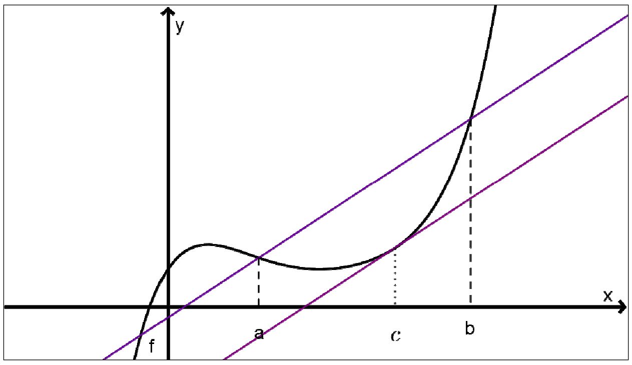
Si une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$

alors $\exists\, c \in \,]a;b[\; : \; f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Ce théorème est admis sans démonstration.

Interprétation graphique : Sous les hypothèses données, il existe au moins un réel c de $]a;b[$ tel que la tangente au graphique de f au point $(c;f(c))$ soit parallèle à la droite passant par les points $(a;f(a))$ et $(b;f(b))$.



Le théorème de Rolle est un cas particulier du théorème de Lagrange :

Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.

Si $f(a) = f(b)$ alors $\exists\, c \in \,]a;b[\; : \; f'(c) = 0$.