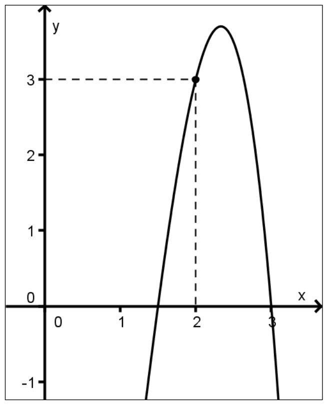
L. Applications de la dérivée

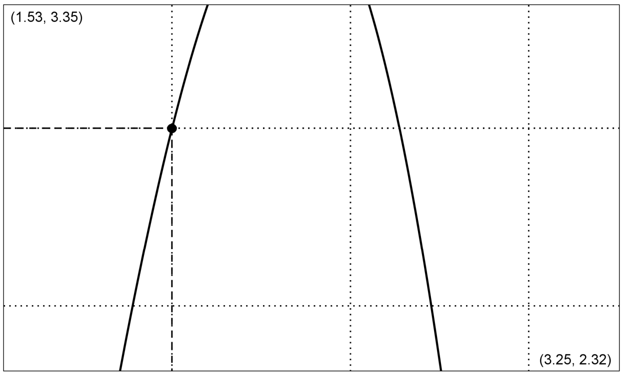
1. Approximation affine



On donne la fonction $f(x) = -2x^3 + 7x^2 - 9$ et on demande de trouver une valeur approchée de $f(2,1)$ et de $f(1,99)$ sans utiliser la calculatrice.

La figure ci-contre donne une partie du graphique de cette fonction à proximité du point $(2;3)$.

Lorsqu'on agrandit suffisamment le graphique, la portion de courbe observée est très proche d'un segment de droite.



La fonction donnée est dérivable en tout réel et $f'(x) = -6x^2 + 14x$.

La courbe passe très près de sa tangente au point $(2;3)$. Cette observation permet de calculer des valeurs approchées d'images de réels très proches de 2.

L'équation de la tangente au point $(2;3)$ est $y = 4(x-2)+3$.

Pour calculer $f(2,1)$, on remplace x par 2,1 dans l'équation de la tangente. On trouve alors $y = 4.(2,1-2)+3 = 3,4$. Cette valeur est une approximation de $f(2,1)$:

$$f(2,1) \approx 3 + 4.0,1$$
$$f(2,1) \approx 3,4$$

Procède de la même manière pour calculer $f(1,99)$.

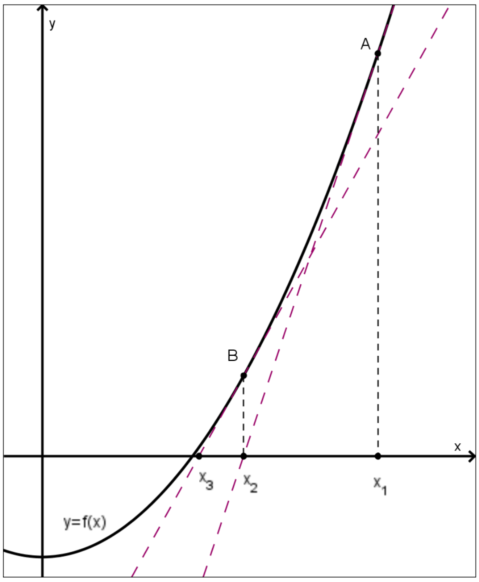
Utilise cette méthode pour calculer les valeurs des fonctions suivantes aux points indiqués :

(1) $f(x) = \sqrt{x+3}$ pour $x = 1,01$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ pour $x = 3,01$

2. Calculer les racines d'une fonction

Dans cet exercice, on découvre la méthode de Newton-Raphson, qui permet généralement de déterminer, en quelques étapes, une racine d'une fonction dérivable.



Le graphique ci-contre permet de visualiser le processus : on cherche le point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $A(x_1; f(x_1))$.

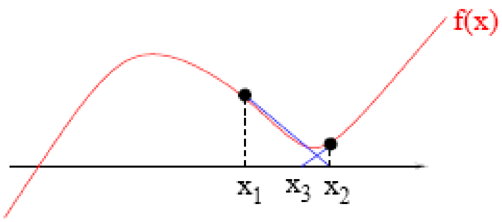
Vérifie que $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

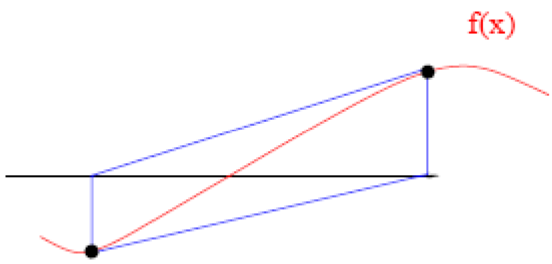
On répète le processus en considérant la tangente au point *B*, ce qui donne x_3, et ainsi de suite…

On définit donc la suite (x_n) par récurrence par : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

La suite $x_1, x_2, x_3, \ldots$ converge généralement vers la racine cherchée. On répète le procédé jusqu'à obtenir la valeur de la racine avec la précision demandée.

Lorsque l'on se trouve proche de la racine, la méthode de Newton-Raphson converge extrêmement vite. Toutefois, pour certains points de départ, la méthode diverge ou cycle. Les figures ci-dessous illustrent quelques mauvais cas qui peuvent se produire. Dans le cas de plusieurs racines pour f, il n'est, en général, pas évident de savoir, a priori quels points de départ convergeront vers quelles racines.





Exemple : Déterminons, avec 4 décimales exactes, la racine de la fonction $f(x)=x^3-2x-5$ sur l'intervalle $[2;3]$.

Cette fonction polynôme est partout dérivable ; elle s'annule entre 2 et 3 car les images de ces deux réels sont de signes opposés : $f(2)=-1$ et $f(3)=16$.

On calcule la dérivée de f : $f'(x)=3x^2-2$. On présente les résultats successifs dans un tableau construit avec un tableur :

Etapes	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}
1	3	16	25	2,36
2	2,36	3,424256	14,7088	2,127197
3	2,127197	0,371099846	11,5749	2,095136
4	2,095136	0,006526626	11,16879	2,094552
5	2,094552	2,14614E-06	11,16144	2,094551
6	2,094551	2,32703E-13	11,16144	2,094551

La racine de la fonction est estimée à 2,0945.

Exercices :

1. Détermine les racines des fonctions suivantes avec une précision d'au moins 5 décimales exactes.
   (1) $f(x)=x^3-x-1$ sur l'intervalle $[1;2]$
   (2) $f(x)=x^3+3x+1$ sur l'intervalle $[-1;0]$
   (3) $f(x)=x-\cos x$ sur l'intervalle $[0;1]$

2. Détermine la racine négative, avec 5 décimales exactes, de la fonction $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2-2$. Utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour repérer cette racine et choisir l'intervalle qui te permettra de commencer les calculs.

3. Analyse marginale

En économie, l'expression *analyse marginale* est une technique qui permet d'étudier l'effet que produit sur une fonction (coût, revenu, demande, production, …) un accroissement d'une unité de la variable indépendante.

Exemple : On estime que le coût de production total (en \$) de x manteaux est : $C(x) = 500 + 3x + 40\sqrt{x}$ dollars .

Si on fabrique 100 manteaux,

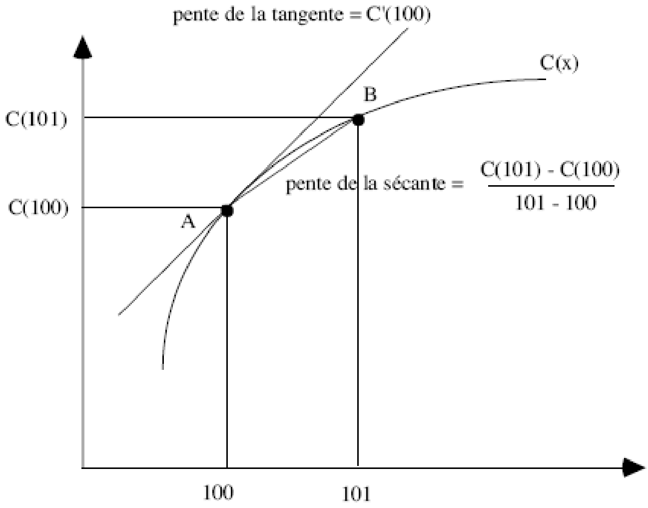
(1) déterminons le coût total de cette production ;

(2) déterminons ce qu'il en coûterait pour 101 manteaux.

Les économistes disposent d'une technique beaucoup plus rapide pour obtenir cette valeur ou du moins pour obtenir une approximation de cette valeur. Ils utilisent la dérivée.

$$\begin{aligned} C(101) - C(100) &= \frac{C(101) - C(100)}{101 - 100} \\ &\approx \lim_{x \to 100} \frac{C(x) - C(100)}{x - 100} \\ &\approx C'(100) \\ &\approx 3 + 20 \frac{1}{\sqrt{100}} \\ &\approx 5 \ \$ \end{aligned}$$

$C'(100)$ est appelé par les économistes le coût marginal pour une production de 100 manteaux. Ce coût représente une bonne approximation de ce qu'il en coûterait pour augmenter la production d'une unité.



Graphiquement, le coût réel pour produire le 101$^{\text{ème}}$ manteau correspond à la pente de la sécante passant par les points *A* et *B*.

$$\text{coût du } 101^{\text{ème}} \text{ manteau} = \frac{C(101)-C(100)}{101-100}.$$

Les économistes obtiennent une bonne approximation de ce coût en utilisant la pente de la tangente au point *A*.

$$\text{coût du } 101^{\text{ème}} \text{ manteau} \approx C'(100)$$

La dérivée constitue ainsi un moyen rapide d'obtenir les coûts engendrés par la production du $x^{\text{ème}}$ manteau.

<u>Exercices :</u>

1. Après étude, une petite entreprise fabriquant des chaises a déterminé qu'il lui en coûte $C(x) = 700 + 9x - \frac{x^2}{100}$ dollars pour fabriquer *x* chaises. Si le prix de vente est de 15 \$ la chaise,
   (1) Quels sont les profits de l'entreprise lorsqu'elle produit et vend 200 chaises ?
   (2) Si la compagnie décidait d'augmenter sa production d'une unité, détermine à l'aide de l'analyse marginale, l'augmentation du profit de l'entreprise qu'il en résulterait.
2. On estime que la production hebdomadaire d'une usine est de $Q(x) = -x^3 + 60x^2 + 1200x$ unités où *x* est le nombre de travailleurs employés à l'usine. Actuellement, l'usine dispose de 30 employés. A l'aide de l'analyse marginale, calcule la variation de production hebdomadaire résultant de l'embauche d'un travailleur supplémentaire.

4. Etude de fonctions

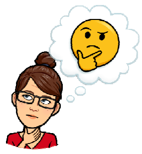
Etudie chaque fonction et réalise son graphique :

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2}$

(2) $f(x)=2x^3-3x^2+1$

(3) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

(4) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$



Pour chercher :

(1) Etudie la fonction $f(x)=\dfrac{x^3}{a\left(x^2-a^2\right)}$ où a est un réel non nul.

En particulier, détermine

(1) le domaine de définition de f

(2) les éventuelles asymptotes

(3) croissance / décroissance / extrema

(4) concavité / points d'inflexion

Esquisse le graphe de f.

(2) En ajustant la valeur du paramètre a, détermine une fonction $g(x)$ définie sur $]-1;1[$, possédant des asymptotes verticales en -1 et 1, dont la dérivée est donnée par la fonction $f(x)$ de la question 1 et telle que $g(0)=1$.

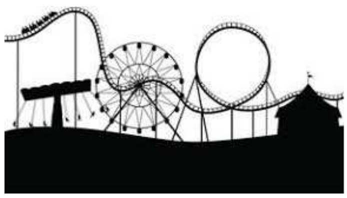
(d'après *Examen d'admission, ULg, 2001*)

5. Problèmes d'optimisation

Dans beaucoup d'applications, les grandeurs physiques ou géométriques sont exprimées à l'aide d'une formule contenant une fonction. Il peut s'agir de la température d'un corps en fonction du temps, du volume d'un gaz dans un ballon en fonction du rayon du ballon, de la vitesse d'un mobile en fonction du temps, …

Disposant de cette fonction, sa dérivée pourra nous être utile pour déterminer ses valeurs extrêmes. Déterminer ces valeurs constituent constitue ce qu'on appelle un *problème d'optimisation*.

<u>Exercices :</u>



1. Les organisateurs d'une foire étudient sa fréquentation afin d'optimiser le temps d'attente aux caisses.
   La billetterie est ouverte chaque jour de 10 heures à 20 heures.
   Le nombre de visiteurs varie suivant le moment de la journée et peut être modélisé par la fonction $f(x) = x^3 - 45x^2 + 663x - 2700$ où x, en heures, appartient à l'intervalle $[10;20]$. A quel moment de la journée y a-t-il le plus de visiteurs ?

2. La température journalière moyenne d'une ville, en degrés Farhrenheit, est donnée par $T = 55 - 21.\cos\dfrac{2\pi(t-32)}{365}$ où t est le temps en jours, avec $t = 1$ correspondant au 1er janvier. Détermine la date
   (1) du jour le plus chaud ;
   (2) du jour le plus froid.

3. Avec un fil de fer de 40 cm de long, on peut créer une infinité de rectangles. Quel est celui qui a l'aire maximale ?

4. Une cartonnerie fabrique des emballages en forme de parallélépipède rectangle à base carrée. Pour être suffisamment maniables, les paquets doivent répondre à deux conditions :
   - la hauteur ne peut être supérieure à 200 cm ;
   - la somme de la hauteur et du périmètre de la base doit être égale à 360 cm.

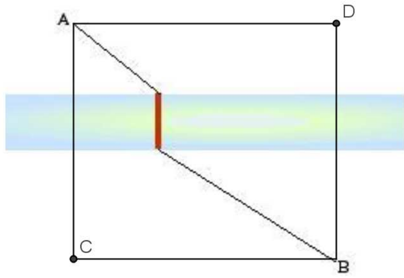
   (1) Détermine les dimensions du paquet de volume maximum.

   (2) Quel est ce volume maximum ?

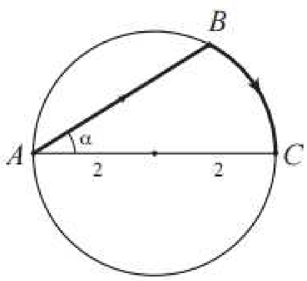
5. Partage le nombre 120 en deux parties de telle sorte que le produit de l'une des parties par le carré de l'autre soit maximum.

6. Sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 16$, on considère le point $A(4;0)$ et deux points B et C de même abscisse x. Pour quelle valeur de x, l'aire du triangle ABC est-elle maximale ? *(ULB, 2012)*

7. Deux maisons A et B sont situées de part et d'autre d'une rivière. On veut construire un pont, perpendiculairement aux berges, de façon à ce que la distance à parcourir entre les deux maisons soit la plus courte possible. Détermine le meilleur emplacement du pont sachant que $\overline{AD} = \overline{AC} = 10$ m, que la rivière fait 1 m de large et qu'elle est située à 3 m du point A.

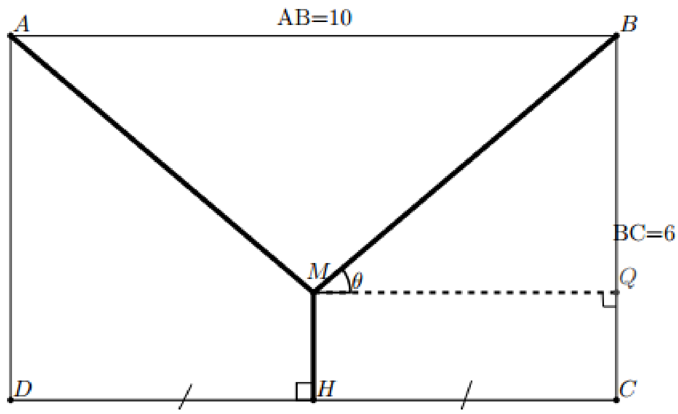


8. Adrien part du point A situé au bord d'un lac circulaire de 2 km de rayon et veut atteindre le point C diamétralement opposé le plus rapidement possible. Il peut aller à pied à la vitesse de 4 km/h ou en barque à la vitesse de 2 km/h. Sous quel angle α par rapport au diamètre doit-il orienter sa barque ?



9. Un particulier (matheux) décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

   On donne ci-dessous le plan de cette façade ainsi que quelques dimensions, exprimées en mètres.



   $[AM]$ et $[BM]$ représentent les deux premiers tuyaux.

   $[MH]$ représente le tuyau vertical.

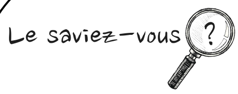
   MH est la médiatrice de $[DC]$.

   On souhaite trouver la position du point M qui permet de minimiser la longueur totale des tuyaux. On note Q le projeté orthogonal de M sur $[BC]$. La variable est la mesure en radian de l'angle $B\hat{M}Q = \theta$.

10. Une bouée munie d'une cloche flotte à la surface de l'océan. La hauteur h (en mètres) de la bouée varie selon la règle $h(t) = 0,5.\cos\left(\frac{2\pi}{5}(t-2)\right) + 2,5$ où t représente le temps (en secondes).

    La cloche sonne chaque fois que la bouée se trouve sur la crête d'une vague.

    Combien de fois par minute entend-on la cloche sonner ?



Les mathématiques évoluent : nombre de résultats ont été prouvés au fil de l'Histoire, mais beaucoup résistent et d'autres questions émergent.

En 1900, David Hilbert (1862-1943) dresse une liste de 23 problèmes pour les générations à venir.

En 2000, l'Institut de mathématiques Clay, reprenant l'idée, sélectionne sept autres problèmes parmi lesquels se trouve l'existence de solutions aux équations aux dérivées partielles de Navier-Stokes qui décrivent les mouvements des fluides.

The *Navier–Stokes* equations are then given by

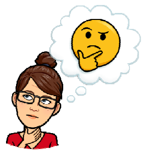
$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial t}u_i + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t) \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0),$$

$$(2)\qquad \operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)$$

with initial conditions

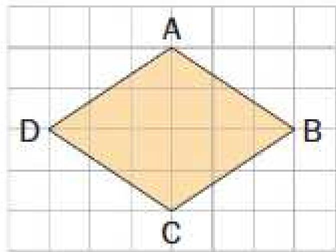
$$(3)\qquad u(x,0) = u^\circ(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Un million de dollars est offert pour chaque résolution et, en 2019, six des sept problèmes ne sont toujours pas résolus.

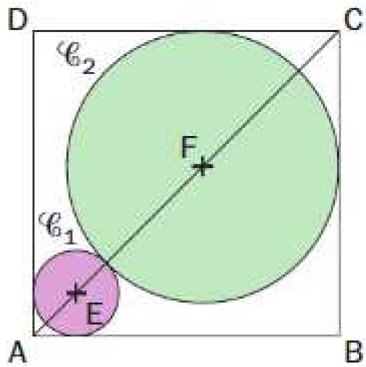


Pour chercher :

1. ABCD est un losange de périmètre p.
   On note x la longueur d'une diagonale de ce losange.
   Détermine les dimensions du losange pour que son aire soit maximale.
   Sol :



2. Sangaku (énigme japonaise)
   $ABCD$ est un carré de côté 1. E et F sont deux points de la diagonale $[AC]$. Les cercles $\mathscr{C}_1$ de centre E et $\mathscr{C}_2$ de centre F sont tangents entre eux et tangents à chacun des deux côtés du carré.
   Quelles sont les positions des points E et F et les rayons respectifs de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ pour que la somme des aires des deux cercles soit maximale.
   Sol :

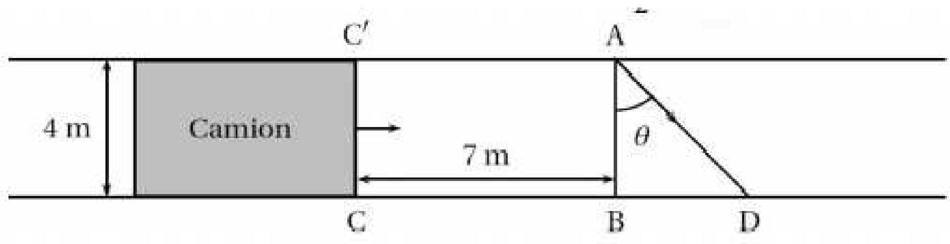


3. Un lapin désire traverser une route de 4 m de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h.

Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est-à-dire à… 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-dessous.

Le lapin part du point A en direction de D. Cette direction est repérée par l'angle $\theta = B\hat{A}D$ avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (en radians).



(1) Détermine les distances $\overline{AD}$ et $\overline{CD}$ en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances $\overline{AD}$ et $\overline{CD}$.

Sol : $\overline{AD} = \dfrac{4}{\cos\theta}$, $\overline{CD} = 7 + 4.\tan\theta$, $t_1 = \dfrac{1}{125\cos\theta}\text{min}$ et $t_2 = \dfrac{7+4\tan\theta}{1000}\text{min}$

(2) On pose $f(\theta) = \dfrac{7}{2} + 2\tan\theta - \dfrac{4}{\cos\theta}$.

Montre que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

Sol : Le lapin aura traversé la route avant le camion ssi $t_1 < t_2 \Leftrightarrow \dfrac{7}{2} + 2\tan\theta - \dfrac{4}{\cos\theta} > 0$

(3) Conclus : le lapin sera-t-il sain et sauf ?

Sol : Tout est bien qui finit bien !

(Baccalauréat Nouvelle Calédonie 2005)