DÉRIVÉES ET APPLICATIONS

Dérivée première et croissance

C. SCOLAS

https://bit.ly/4jGC0ij

1. On donne ci-dessous la courbe de f ainsi que les courbes de trois fonctions f_1, f_2 et f_3. Une de ces fonctions est la dérivée de f. Laquelle ? Justifie ton choix.

f_3 est la dérivée de f car f_3 possède des racines en $x = 0$ et en $x = 1,5$.
f possède des extremums pour ces 2 abscisses.
On peut aussi utiliser le signe de f_3 pour justifier son choix.

Courbe de f

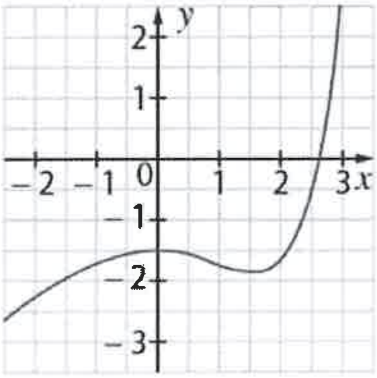


Figure 1

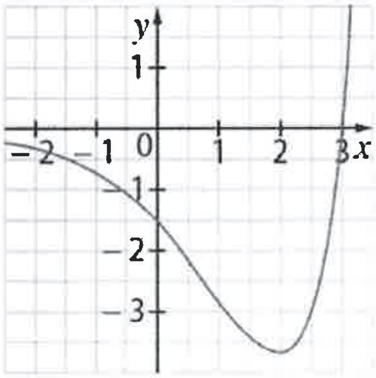


Figure 2

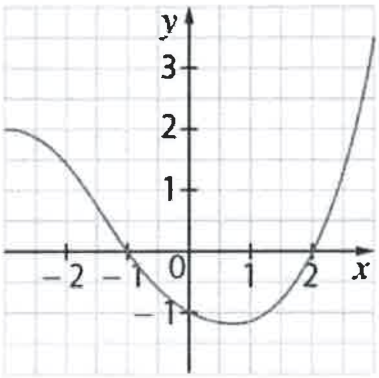
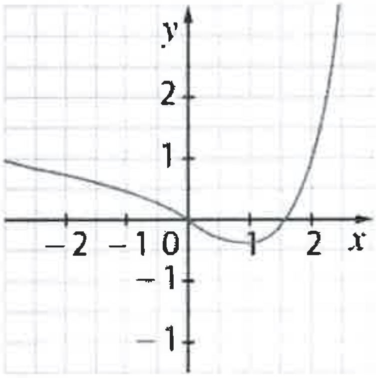


Figure 3



2. Détermine les coordonnées du minimum de la fonction $f(x) = x^4 - 4x + 2$.

$f'(x) = 4x^3 - 4$

Racine : $4x^3 - 4 = 0$

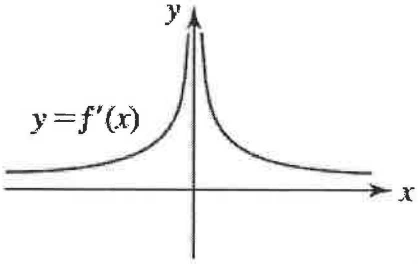
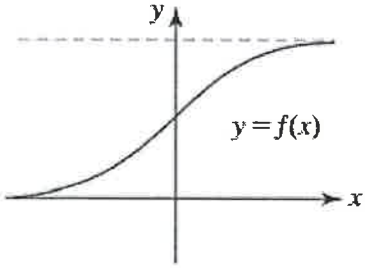
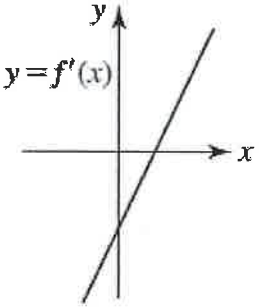
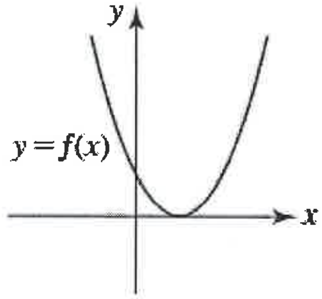
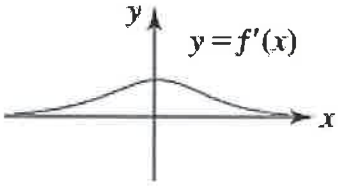
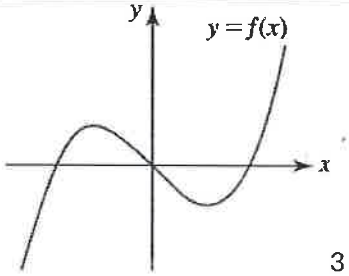
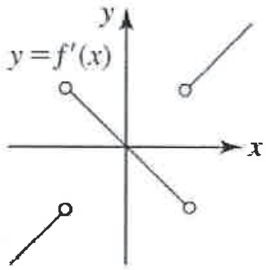
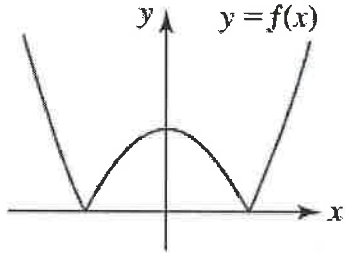
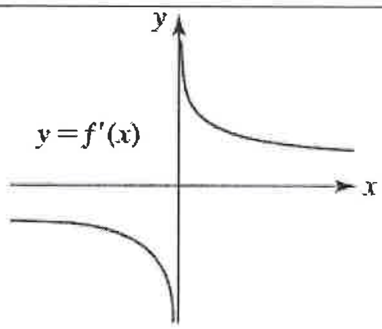
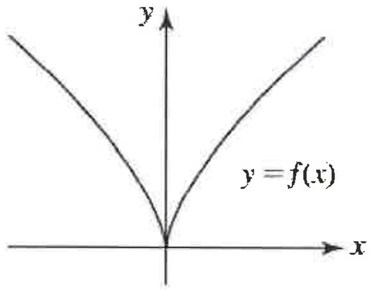
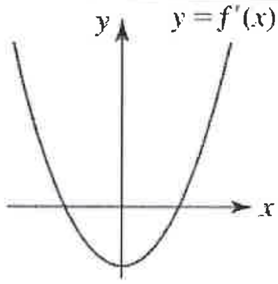
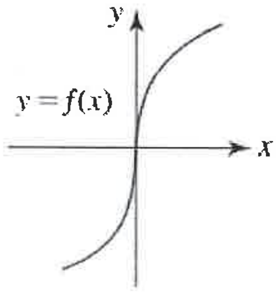
$x^3 = 1$

$x = 1$

x		1	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min $(1;-1)$	$\nearrow$

$\rightarrow$ f possède un minimum en $(1;-1)$

3. Associe le graphe de f à celui de sa dérivée première :

 A 6	 1
 B 2	 2
 C 1	 3
 D 4	 4
 E 5	 5
 F 3	 6

4. Détermine les coordonnées des extremums de la fonction $f(x)=x^2+\dfrac{16}{x^2}$. Précise s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

$$f'(x) = 2x + 16 \cdot \frac{-2x}{x^4}$$

$$= 2x - \frac{32}{x^3}$$

$$= \frac{2x^4-32}{x^3}$$

Racines: (N) $2x^4 - 32 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^4 = 16$

$\Leftrightarrow \quad x = \pm 2$

(D) $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x		-2		0		2	
$2x^4-32$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^3	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min $(-2;8)$	$\nearrow$		$\searrow$	min $(2;8)$	$\nearrow$

→ f possède 2 minima: en $(-2;8)$ et en $(2;8)$.

5. Détermine les coordonnées des extremums de la fonction $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x+1)^2}$. Précise s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

$$f'(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x+1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+1)\left[(2x+2)\cdot(x+1) - (x^2-2x)\cdot 2\right]}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} + 2x + 2x + 2 - \cancel{2x^2} + 4x}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{8x+2}{(x+1)^3}$$

Racines : (N) $x = -1/4$

(D) $x = -1$

x		-1		$-1/4$	
$8x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)^3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	AV $x=-1$	$\searrow$	min $(-\frac{1}{4};1)$	$\nearrow$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow AV$$

→ f possède un minimum en $(-\frac{1}{4};1)$

6. Détermine une expression analytique de la fonction f du second degré pour laquelle $f(-1)=11$, $f'(-1)=7$ et qui admet un maximum au point d'abscisse 2. $\rightarrow f'(2)=0$

$f(x)=ax^2+bx+c \quad \rightarrow f'(x)=2ax+b$

$f(-1)=11 \Leftrightarrow a-b+c=11 \quad (1)$

$f'(-1)=7 \Leftrightarrow -2a+b=7 \quad (2)$

$f'(2)=0 \Leftrightarrow 4a+b=0 \quad \rightarrow b=-4a$

On remplace b par $-4a$ dans l'équation (2) : $-2a-4a=7$

$-6a=7$

$a=-\frac{7}{6} \Rightarrow b=-4\cdot\frac{-7}{6}=\frac{14}{3}$

On remplace a par $-\frac{7}{6}$ et b par $\frac{14}{3}$ dans l'équation (1) :

$-\frac{7}{6}-\frac{14}{3}+c=11 \Leftrightarrow c=\frac{101}{6} \qquad \Rightarrow f(x)=-\frac{7}{6}x^2+\frac{14}{3}x+\frac{101}{6}$

7. Supposons que $f'(x)=\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{x+3}{x-4}$.

Détermine les deux intervalles de croissance de f.

$f(x)=\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{x+3}{x-4}=\dfrac{x.(x-4)-(x+2).(x+3)}{(x+2)(x-4)}$

Racines : (N) $x.(x-4)-(x+2).(x+3)=0$

$x^2-4x-(x^2+3x+2x+6)=0$

$x^2-4x-x^2-5x-6=0$

$-9x-6=0$

$x=-\frac{2}{3}$

(D) $(x+2).(x-4)=0$

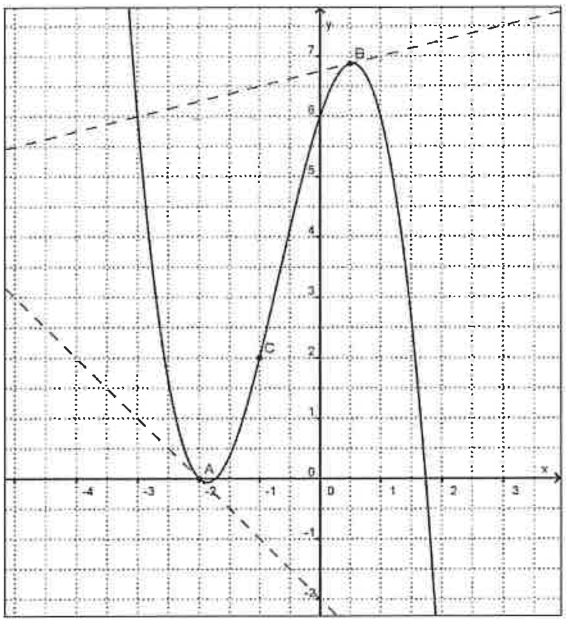
$x=-2 \qquad x=4$

x		-2		$-\frac{2}{3}$		4	
$-9x-6$	+	+	+	0	−	−	−
$x+2$	−	0	+	+	+	+	+
$x-4$	−	−	−	−	−	0	+
f'	+	$\nexists$	−	0	+	$\nexists$	−
f	↗		↘		↗		↘

$\rightarrow f$ est croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $[-\frac{2}{3};4[$

8. f est une fonction de la forme $f(x)=a.(x+k).(x^2-C)$.

Grâce aux informations fournies par son graphique (les droites en pointillés sont évidemment des tangentes), détermine les valeurs de a et k et C.



$f'(x) = a.\left[(x+k)'.(x^2-C)+(x+k).(x^2-C)'\right]$

$= a.\ (x^2-C+(x+k).2x)$

$= a.\ (x^2-C+2x^2+2kx)$

$= a.\ (3x^2+2kx-C)$

On sait que

$f'(\frac{1}{2})=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}=a.\left(3.\frac{1}{16}+2k.\frac{1}{4}-C\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}=a.\left(\frac{3}{16}+\frac{k}{2}-C\right)$

$f(-1)=2 \Leftrightarrow 2=a.(-1+k).(1-C)$

$f(0)=6 \Leftrightarrow 6=a.k.(-C)$

$f(1)=6 \Leftrightarrow 6=a.(1+k).(1-C)$

$f'(-2)=-1 \Leftrightarrow -1=a.(3.4+2k.(-2)-C)$

$\Leftrightarrow -1=a.(12-4k-C)$

En résolvant le système formé par ces équations, on trouve $a=-1$

$k=2$

$C=3$

9. On donne la fonction $f(x)=\dfrac{ax}{(x-b)^2}$. Détermine les valeurs de a et b de sorte que $f(x)$ ait un minimum en $\left(-1;-\dfrac{3}{4}\right)$. $\rightarrow f(-1)=-\frac{3}{4}$ et $f'(-1)=0$

$$f'(x)=\frac{a.(x-b)^2-ax.2.(x-b)}{(x-b)^4}=\frac{a(x-b).[x-b-2x]}{(x-b)^4}=\frac{a.(-x-b)}{(x-b)^3}$$

$f(-1)=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}=\frac{-a}{(-1-b)^2}$ $\longrightarrow$ $-\frac{3}{4}=\frac{-a}{(-1-1)^2} \Leftrightarrow a=3$

$f'(-1)=0 \Leftrightarrow 0=\frac{a.(1-b)}{(-1-b)^3} \Leftrightarrow a.(1-b)=0$

$a=0$ impossible $f(x)$ serait alors nulle

$b=1$

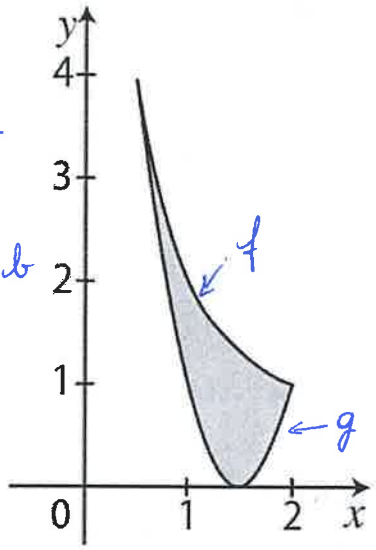
10. Des graphistes travaillent à la conception d'un logo publicitaire. Dans un repère, le contour de ce logo est modélisé par deux arcs de courbe C_1 et C_2 d'équations respectives $f(x)=\frac{k}{x}$ et $g(x)=ax^2+bx+c$ avec $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Les contraintes sont les suivantes : ces deux arcs ont pour extrémités les points de coordonnées $\left(\frac{1}{2};4\right)$ et $(2;1)$ et ils ont la même tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Détermine les réels k, a, b et c. On sait que

$f'(x) = \frac{-k}{x^2}$

$g'(x) = 2ax+b$



- $f\left(\frac{1}{2}\right)=4 \Leftrightarrow 4=\frac{k}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow k=2$
- $g\left(\frac{1}{2}\right)=4 \Leftrightarrow 4=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c \quad (1)$
- $g(2)=1 \Leftrightarrow 1=4a+2b+c \quad (2)$
- $g'\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{-k}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=2a\cdot\frac{1}{2}+b$

$\Leftrightarrow -4k = a+b$

$\Leftrightarrow -4\cdot 2 = a+b$

$\Leftrightarrow a=-8-b$

On remplace a par $-8-b$ dans l'équation (1):

$4=\frac{1}{4}\cdot(-8-b)+\frac{1}{2}b+c \Leftrightarrow c=6-\frac{1}{4}b$

On remplace a par $-8-b$ et c par $6-\frac{1}{4}b$ dans l'équation (2):

$1 = 4\cdot(-8-b)+2b+6-\frac{1}{4}b$

$1 = -32-4b+2b+6-\frac{1}{4}b$

$27 = -\frac{9}{4}b$

$b=-12 \Rightarrow a=-8-(-12)$ et $c=6-\frac{1}{4}\cdot(-12)$

$a=4$ $\qquad$ $c=9$