



1. Dérivé les fonctions suivantes sachant que a et b sont des réels constants :

$$(1) f(x) = a \frac{x^2}{2} - 2ax - 1 = a \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2ax - 1$$

$$f'(x) = a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x - 2a = ax - 2a$$

$$(2) f(x) = \sqrt{2ax}$$

$$f'(x) = \frac{(2ax)'}{2\sqrt{2ax}} = \frac{2a}{2\sqrt{2ax}} = \frac{a}{\sqrt{2ax}}$$

$$(3) f(x) = \frac{ax+1}{bx}$$

$$f'(x) = \frac{a \cdot bx - (ax+1) \cdot b}{(bx)^2} = \frac{abx - abx - b}{b^2x^2} = \frac{-b}{b^2x^2} = \frac{-1}{bx^2}$$

2. Détermine une équation réduite de la tangente au graphe de $f(x) = x\sqrt{x^2+2x}$ au point d'abscisse $a=1$.

$$T: y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$$

$$f(1) = 1 \cdot \sqrt{1^2+2 \cdot 1} = \sqrt{3}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2+2x} + x \cdot \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \sqrt{x^2+2x} + x \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

$$\rightarrow f'(1) = \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3+2}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot (x-1) + \sqrt{3}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

3. Détermine une équation réduite de la tangente au graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \text{ en son point d'abscisse 4.}$$

$$f(4) = \frac{9}{3} = 3$$

$$f'(x) = \left(2 + \frac{3}{x-1} \right)' = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$\rightarrow f'(4) = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

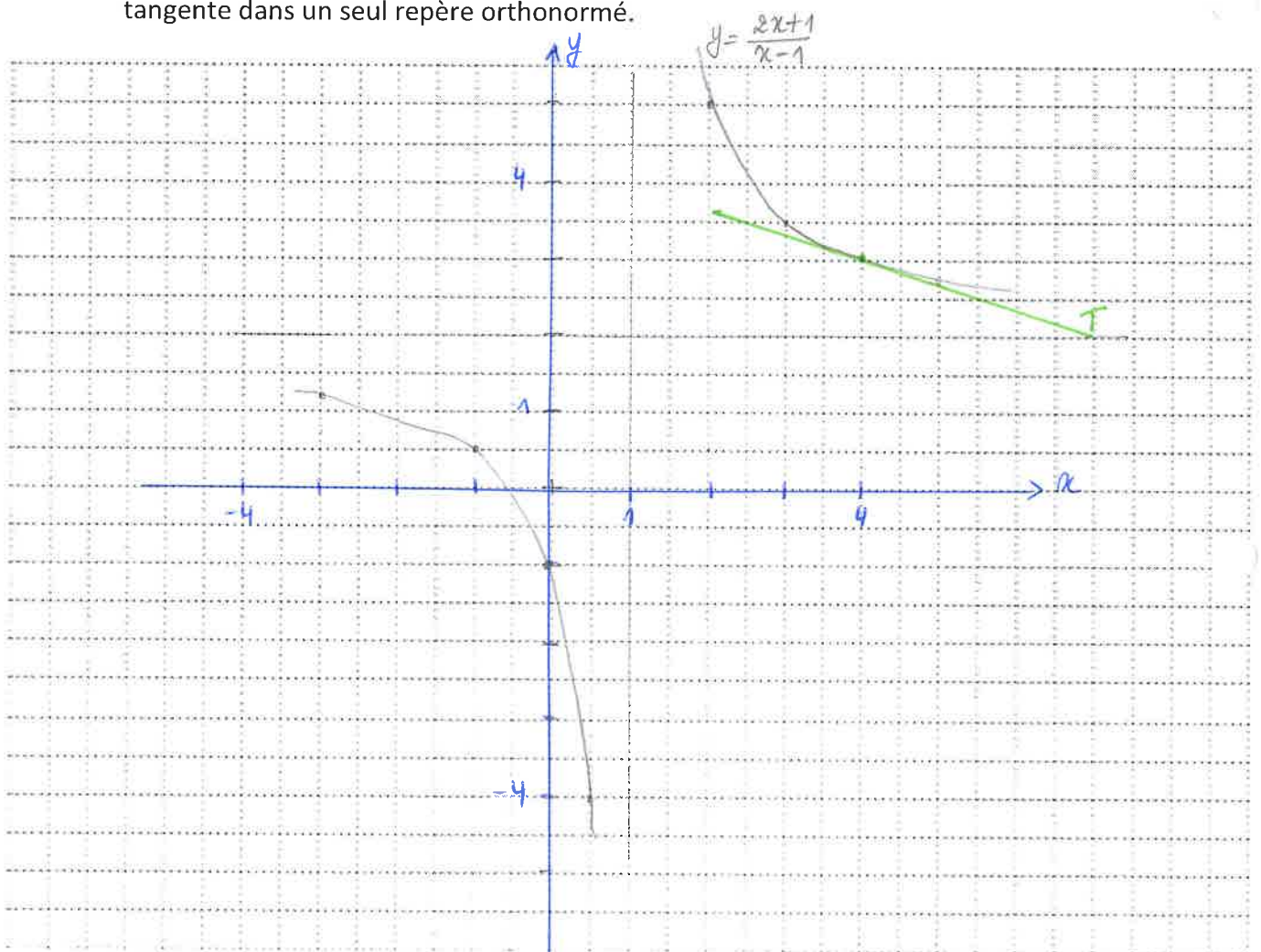
$$\Rightarrow T = y = -\frac{1}{3} \cdot (x-4) + 3$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-1 \\ - (2x-2) & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$$\rightarrow f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$$

Représente ensuite la fonction, en indiquant les manipulations graphiques, et la tangente dans un seul repère orthonormé.



Manipulations graphiques : A partir du graphique de la fonction inverse, on ajoute 1 à chaque abscisse, on multiplie chaque ordonnée par 3 et on ajoute 2 à chaque ordonnée.

4. Détermine une équation réduite de la tangente au graphe de la fonction

$f(x) = 2x^2 - 4x - 1$ en son point d'abscisse 2.

$$f(2) = -1$$

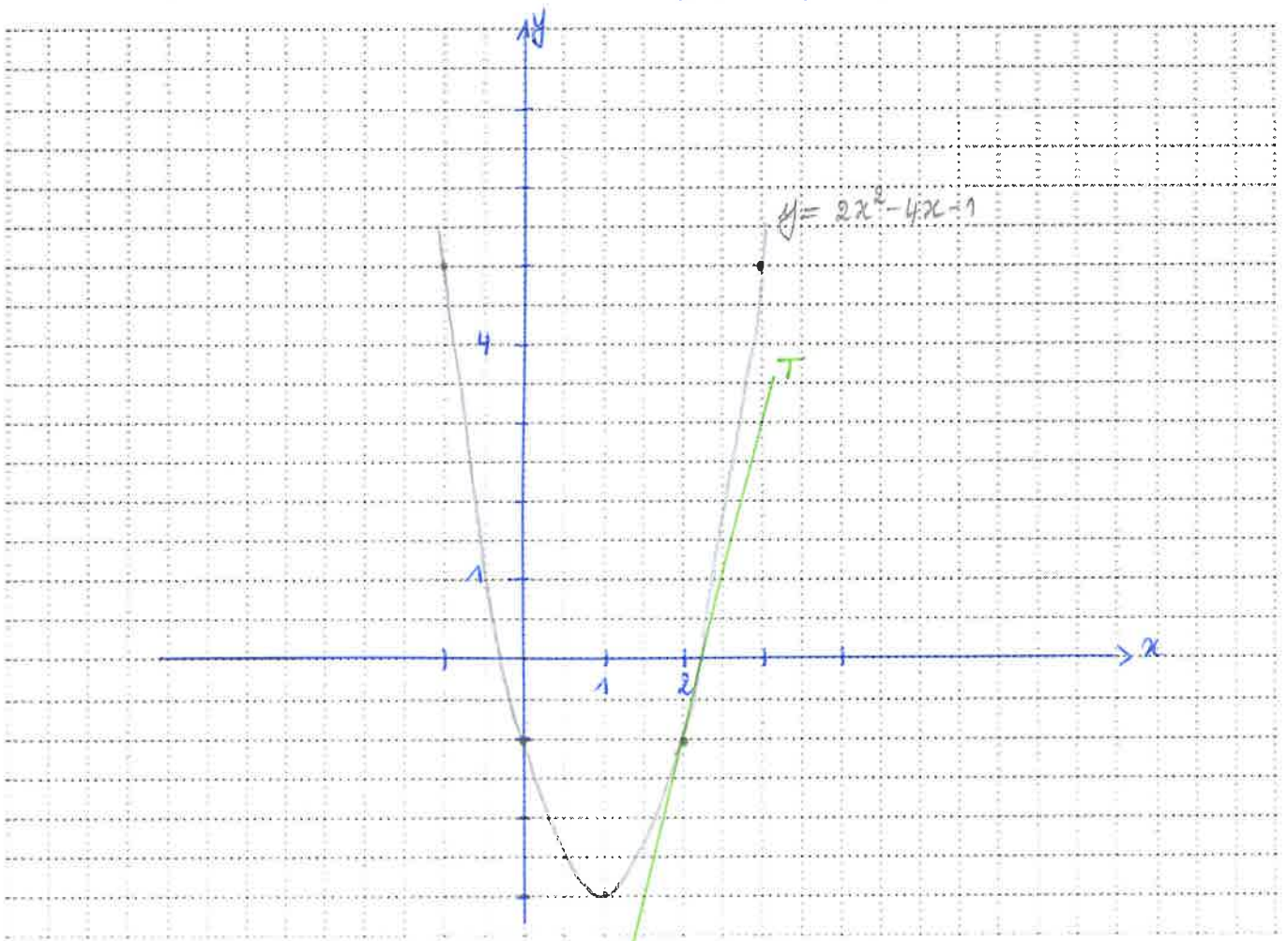
$$f'(x) = 4x - 4$$

$$\rightarrow f'(2) = 4$$

$$\Rightarrow y = 4(x - 2) - 1$$

$$T \equiv y = 4x - 9$$

Représente ensuite la fonction, en indiquant les manipulations graphiques, et la tangente dans un seul repère orthonormé. $f(x) = 2 \cdot (x - 1)^2 - 3$



Manipulations graphiques : A partir du graphique de la fonction carrée, on ajoute 1 à chaque abscisse, on multiplie chaque ordonnée par 2 et on soustrait 3 à chaque ordonnée.

5. Détermine l'expression d'une fonction du troisième degré qui admet deux extremums : aux points d'abscisse -1 et 3 , dont le graphique passe par l'origine du repère et pour laquelle la pente de la tangente en ce point (l'origine du repère) vaut -6 .

On sait que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(-1) = 0$, $f'(3) = 0$, $f(0) = 0$ et $f'(0) = -6$.
 $\Downarrow$
 $d = 0$

Or, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

D'où : $f'(0) = -6 \Leftrightarrow c = -6$

$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3a - 2b - 6 = 0 \rightarrow 3a = 2b + 6$

$f'(3) = 0 \Leftrightarrow 27a + 6b - 6 = 0 \rightarrow 9 \cdot (2b + 6) + 6b - 6 = 0$
 $18b + 54 + 6b - 6 = 0$
 $24b + 48 = 0$
 $b = -2$

Ainsi, $3a = 2 \cdot (-2) + 6 = 2$
 $a = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ On a donc $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x$

6. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 2}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Détermine a et b tels que la droite d'équation $y = 8$ soit tangente à G_f au point d'abscisse 3 .

On sait que $f'(3) = 0$ et que $f(3) = 8$.

Or, $f'(x) = \frac{(2x+a) \cdot (x-2) - (x^2+ax+b) \cdot 1}{(x-2)^2}$
 $= \frac{2x^2 - 4x + ax - 2a - x^2 - ax - b}{(x-2)^2}$
 $= \frac{x^2 - 4x - 2a - b}{(x-2)^2}$

D'où $f'(3) = 0 \Leftrightarrow \frac{9 - 12 - 2a - b}{1} = 0 \Leftrightarrow -3 - 2a - b = 0$

De plus, $f(3) = 8 \Leftrightarrow \frac{9 + 3a + b}{1} = 8 \Leftrightarrow 1 + 3a + b = 0$

On résout le système $\begin{cases} -3 - 2a - b = 0 \\ 1 + 3a + b = 0 \end{cases} \rightarrow b = -3 - 2a$
 $\rightarrow 1 + 3a - 3 - 2a = 0$
 $a = 2 \Rightarrow b = -3 - 4$
 $b = -7$

7. Détermine la valeur des trois réels a , b et c tels que le graphique de la fonction

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} \text{ admette une tangente d'équation } y = 2 \text{ au point d'abscisse 3 et}$$

une tangente parallèle à la droite $y = 3x + 2$ au point d'abscisse 2.

On sait que $f'(3) = 0$, $f(3) = 2$ et $f'(2) = 3$.

Or, $f'(x) = a - \frac{c}{(x-1)^2}$.

D'où : $f'(3) = 0 \Leftrightarrow a - \frac{c}{4} = 0 \Leftrightarrow c = 4a$

$f'(2) = 3 \Leftrightarrow a - c = 3 \longrightarrow a - 4a = 3$
 $a = -1 \Rightarrow c = -4$

De plus, $f(3) = 2 \Leftrightarrow 3a + b + \frac{c}{2} = 2$
 $\Leftrightarrow 3 \cdot (-1) + b - 2 = 2$
 $\Leftrightarrow b = 7$

8. Détermine le domaine de dérivabilité de la fonction $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$.

$$f'(x) = \frac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x+3}}$$

CE: $2x^2 - 5x + 3 > 0$

Racines: $2x^2 - 5x + 3 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4} < \frac{3}{2}$

TS:

x	1	$\frac{3}{2}$
$2x^2 - 5x + 3$	+	0 - 0 +

donc $f =]-\infty; 1[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$

9. Détermine le domaine de dérivabilité de la fonction $f(x) = 5x - \sqrt{9 - x^2}$.

$$f'(x) = 5 - \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}$$

$$= 5 + \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$\text{CE: } 9 - x^2 > 0$$

$$\text{Racines: } 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$\text{TS: } \begin{array}{c|cc} x & -3 & 3 \\ \hline 9-x^2 & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{dom}_d f =]-3; 3[$$