DÉRIVÉES ET APPLICATIONS

Taux de variation moyen, instantané et nombre dérivé

C. SCOLAS

https://bit.ly/4jGC0ij

1. Calcule le taux de variation moyen de la fonction $f(x)=x^3$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.

$$\frac{f(\frac{3}{2})-f(\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{(\frac{3}{2})^3-(\frac{1}{2})^3}{1}=\frac{27}{8}-\frac{1}{8}=\frac{13}{4}$$

2. Calcule le taux de variation instantané de la fonction $f(x)=1-3x^2$ en $x=1$?

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1-3x^2-(-2)}{x-1}$$

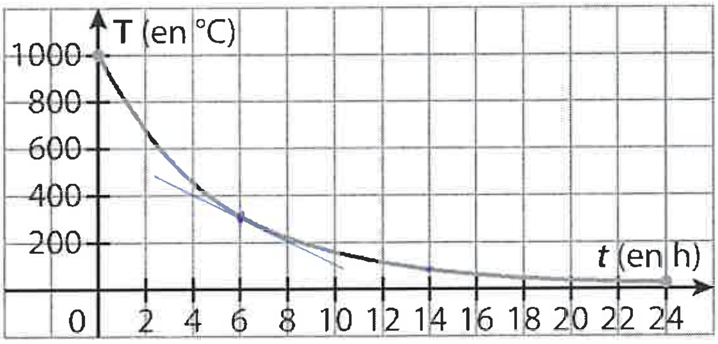
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-3x^2+3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-3(x^2-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-3\cdot\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$=-6$$

3. La température d'un four, en degrés Celsius, à l'instant t, en heures, est donnée par la fonction représentée ci-dessous :



(1) Estime graphiquement le taux de variation instantané de la température à t=6h.

50 °C/h

(2) Donne une estimation de la température moyenne sur les 14 premières heures.

$$\frac{100-1000}{14-0}=-64{,}29\,°C/h$$

4. Un athlète court le 100 m et sa position après t secondes est donnée par $s(t)=\frac{1}{5}t^2+8t$ m.

(1) Quel est le taux de variation moyen du nombre de mètres parcourus entre 1 et 3 secondes ? Indique l'unité.

$$\frac{s(3)-s(1)}{3-1}=\frac{\frac{1}{5}\cdot 3^2+8\cdot 3-\left(\frac{1}{5}\cdot 1^2+8\cdot 1\right)}{3-1}=8{,}8\ m/s$$

(2) Calcule $\lim\limits_{t\to 3}\frac{s(t)-s(3)}{t-3}$. Que représente le nombre obtenu dans ce contexte ?

$$=\lim_{t\to 3}\frac{\frac{1}{5}t^2+8t-25{,}8}{t-3}$$

(N) $\frac{1}{5}t^2+8t-25{,}8=0$

$\Delta=84{,}64$

$t=\frac{-8\pm 9{,}2}{\frac{2}{5}}$ 3 ; -43

$$=\lim_{t\to 3}\frac{\frac{1}{5}\cancel{(t-3)}(t+43)}{\cancel{t-3}}$$

$=9{,}2\ m/s.$ Il s'agit de la vitesse instantanée de l'athlète à la 3e seconde.

(3) Calcule la vitesse de l'athlète sur la ligne d'arrivée.

L'athlète franchit la ligne d'arrivée pour $\frac{1}{5}t^2+8t=100$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5}t^2+8t-100=0$

$\Delta=144$

$t=\frac{-8\pm 12}{\frac{2}{5}}$ 10 ; -50

$$\rightarrow \lim_{t\to 10}\frac{s(t)-s(10)}{t-10}=\lim_{t\to 10}\frac{\frac{1}{5}t^2+8t-100}{t-10}$$

$$=\lim_{t\to 10}\frac{\frac{1}{5}\cancel{(t-10)}(t+50)}{\cancel{t-10}}=12\ m/s.$$

5. Vérifie, par calculs, que le point d'abscisse 1 est un point à tangente verticale de la fonction $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{1/3}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x-1)^{-2/3}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$=\frac{1}{0}$ CI

x		1	
$\sqrt[3]{(x-1)^2}$	+	0	+

$\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{0^+}=+\infty$

Comme $f'(1)$ n'est pas un nombre réel, le point d'abscisse 1 est un point à tangente verticale.

6. Vérifie, par calculs, que le point d'abscisse 2 est un point de rebroussement de la fonction $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}-0}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^{2/3}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x-2)^{-1/3}$$

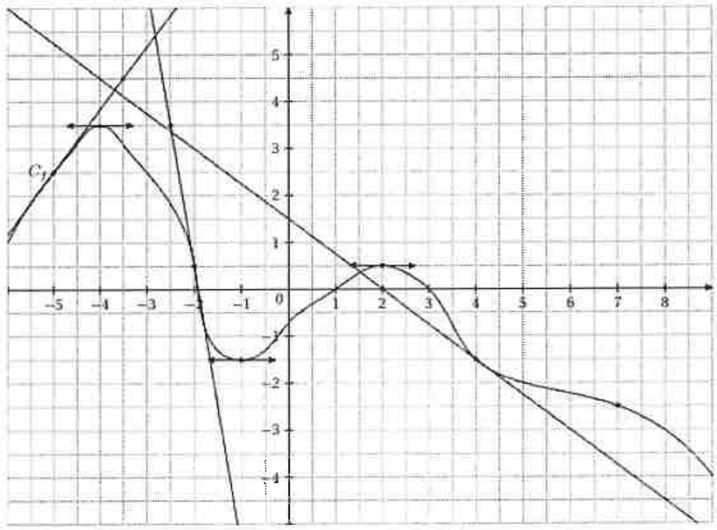
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$$

x		2	
$\sqrt[3]{x-2}$	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow f'(2)=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\[2ex] \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

Comme les nombres dérivés à gauche et à droite de 2 sont infinis mais différents, le point d'abscisse 2 est bien un point de rebroussement.

7. Voici la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



D'après le graphique, donne la valeur de $f'(-5), f'(-4), f'(-2)$ et de $f'(4)$.

$f'(-5)=\frac{4}{3}$

$f'(-4)=0$

$f'(-2)=-12$

$f'(4)=-\frac{3}{4}$