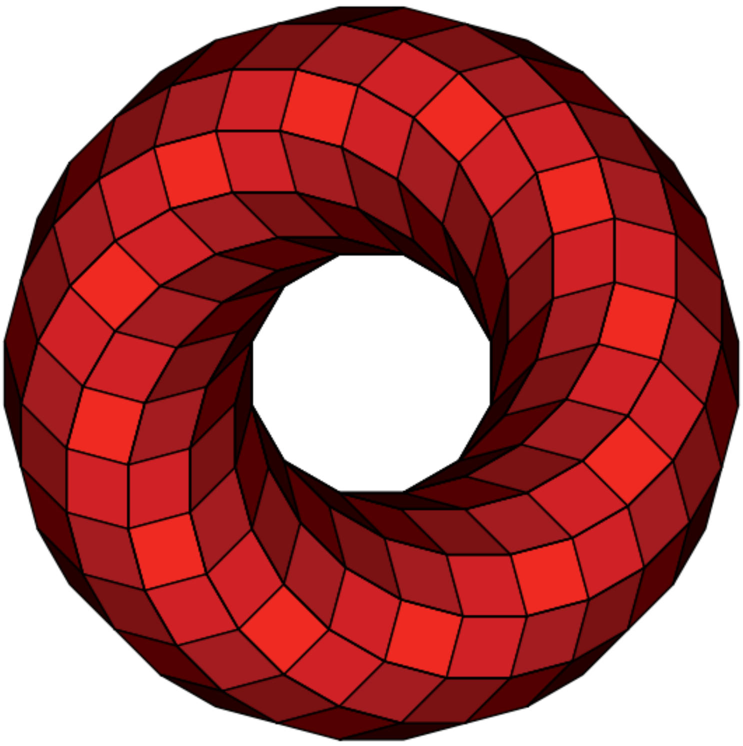
UAA 7 :

Géométrie analytique et synthétique de l'espace



1ère partie : La géométrie synthétique

Objectifs : Géométrie analytique et synthétique de l'espace **5ème 6h**

1ère partie : La géométrie synthétique

L'élève doit SAVOIR :

1. Donner les positions relatives de deux droites.
2. Donner les positions relatives d'une droite et d'un plan.
3. Donner les positions relatives de deux plans.
4. Enoncer le critère de parallélisme de deux droites.
5. Enoncer le critère de parallélisme d'une droite et d'un plan.
6. Enoncer le critère de parallélisme de deux plans.
7. Enoncer et démontrer le critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan.
8. Enoncer et démontrer le critère d'orthogonalité de deux droites.
9. Enoncer et démontrer le critère d'orthogonalité de deux plans.
10. Expliquer comment construire la perpendiculaire commune à deux droites gauches et démontrer le théorème qui y est lié.
11. Démontrer le théorème du plan médiateur.

L'élève doit ETRE CAPABLE DE :

1. Préciser la position relative de droites et de plans, à partir d'un polyèdre.
2. Démontrer des propriétés géométriques par une méthode synthétique.

Les mathématiques progressent souvent au travers de controverses, plus ou moins âpres, plus ou moins exprimées. La rigueur n'est pas toujours la seule pomme de discorde : la simplicité, l'élégance, la beauté d'une construction sont aussi objet de débats. L'argumentation porte souvent sur un problème emblématique, par exemple la construction d'un cercle tangent à trois cercles donnés dans un plan.

Sa résolution par François Viète, dans un texte paru en 1600 sous le titre de l'*Apollonius Gallus*, eut un grand retentissement. Les siècles passant, ce problème fournira à chacun l'occasion de tester l'efficacité et l'élégance de sa mathématique : supériorité de l'algèbre ou de la géométrie analytique naissante sur la géométrie des anciens, dès le XVII° siècle, puis, au XIX° siècle, supériorité de la géométrie pure (synthétique) sur la géométrie analytique.

Émile Lemoine (qui a laissé son nom à un point du triangle) écrit en 1892 dans les *Nouvelles annales de mathématiques* : «Je ne connais pas de question particulière de géométrie élémentaire qui ait donné lieu à autant de travaux et d'ingénieuses solutions. Il n'y a pour ainsi dire pas d'années où quelque géomètre n'ait publié soit une solution, soit des remarques nouvelles, soit quelque démonstration nouvelle au sujet du célèbre problème ; et la mine n'est pas épuisée… »

La querelle analytique-synthétique au début du XIX^{e} siècle sera féconde : elle donnera naissance à la géométrie synthétique (ou supérieure), la géométrie projective, la géométrie des transformations…

A. Rappels

(1) Notations, axiomes[1] et représentation

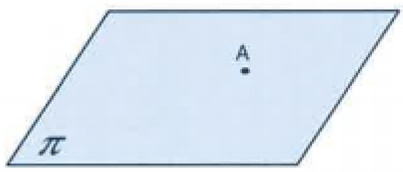
1. Notations

- Un **point** de l'espace se représente par un point et est désigné par une lettre majuscule (A, B, C, …).
- Une **droite** de l'espace se représente par un segment et est désignée par une lettre minuscule $(a, d, d', \ldots)$ ou par deux points qui lui appartiennent $(AB, XY, \ldots)$.
- Un **plan** de l'espace se représente généralement par un parallélogramme et est désigné par une lettre grecque $(\alpha, \beta, \pi, \ldots)$ ou par trois points qui lui appartiennent $(ABC, XYZ, \ldots)$

Pour signaler que le point A **appartient** à la droite d, on écrit $A \in d$. De même, un point peut appartenir à un plan : $A \in \pi$.

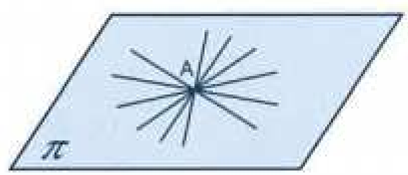
Par contre, une droite est **incluse** dans un plan et on écrit $d \subset \pi$.

2. Dans le plan

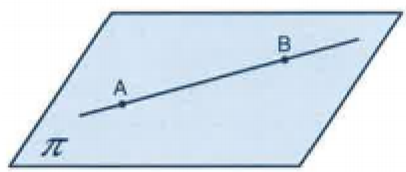


1) Le plan est un ensemble infini de points.
   Le point A est un point du plan π s'écrit : $A \in \pi$.

2) Une droite est un ensemble infini de points.
   Le point A est un point de la droite d s'écrit :
   $A \in d$.



3) Par un point, il passe une infinité de droites.



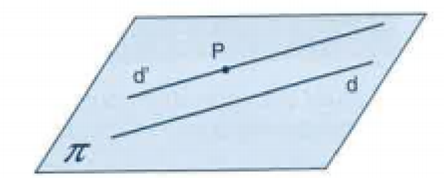
[1] Un axiome (du grec ancien « axioma » qui signifie « considéré comme di
une propriété admise sans démonstration. Les axiomes représentent le fondement d'une théorie mathématique.

4) Deux points distincts définissent une et une seule droite.

La droite passant par A et B s'écrit : AB .

5) Axiome d'Euclide :

Par un point donné, on peut mener une et une seule droite parallèle à une droite donnée.

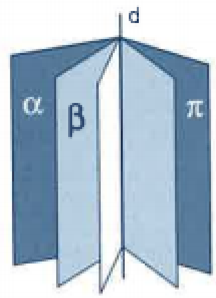


En langage mathématique, on écrit : $\forall P \in \pi, \forall d \subset \pi : \exists! d' \subset \pi \mid d' // d \text{ et } P \in d'$.

On peut donc aussi caractériser une droite par un point et une droite : la parallèle à la droite d passant par le point A détermine une et une seule droite.

2. Dans l'espace

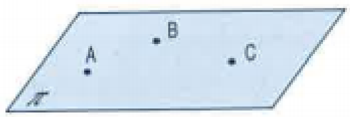
1) L'espace est un ensemble infini de points.



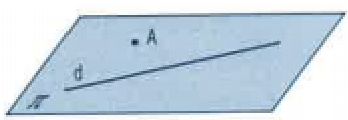
2) Par une droite, il passe une infinité de plans.

La droite d est incluse dans le plan α s'écrit : $d \subset \alpha$.

3) Trois points distincts non alignés déterminent un et un seul plan.

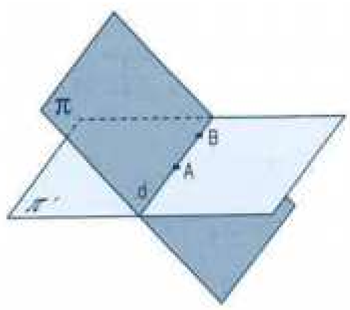


On peut aussi caractériser un plan par une droite et un point : la droite d et le point A n'appartenant pas à d déterminent un et un seul plan.



4) Toute droite qui comprend deux points distincts d'un plan est incluse dans ce plan.

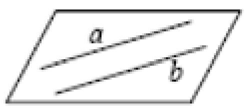
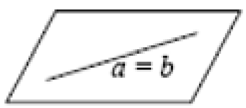
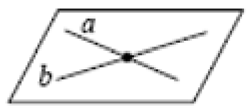
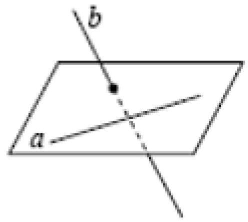
5) Deux plans qui ont deux points distincts communs ont une droite commune.



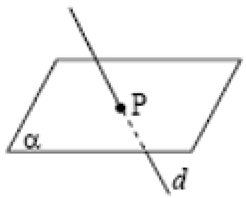
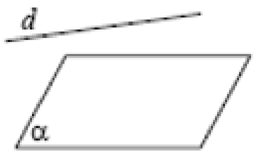
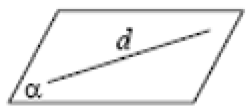
(2) Positions relatives des droites et des plans de l'espace

Rechercher les différentes positions de deux droites, d'une droite et d'un plan, ou de deux plans, c'est envisager le nombre de points d'intersection qu'ils peuvent avoir.

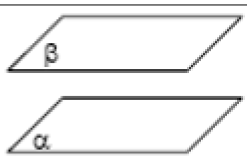
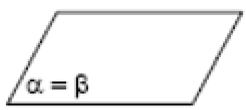
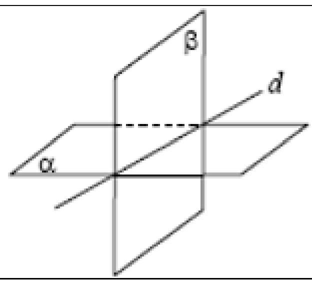
1. Positions relatives de deux droites

Parallèles distinctes	**Parallèles confondues**	**Sécantes**	**Gauches**
Parallèles sans point d'intersection	Tous les points en commune	Un unique point d'intersection	Non parallèles sans point d'intersection
			

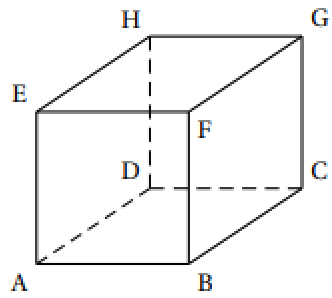
2. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Sécants	**Parallèles distincts**	**La droite est incluse dans le plan**
Un unique point d'intersection	Aucun point d'intersection	Tous les points de d appartiennent à α
		

3. Positions relatives de deux plans

Parallèles distincts	**Parallèles confondus**	**Sécants**
Aucun point d'intersection	Tous les points en commun	Une droite comme intersection
		

4. *Exercices*



1. On a représenté en perspective cavalière un cube $ABCDEFGH$.
   Le point I est le centre du carré $ABCD$.

   (1) Précise la position relative des plans suivants (précise leur éventuelle intersection) :

   a. les plans BCH et EBC ……………………

   b. les plans BCH et AEI……………………

   c. les plans ADI et FGH………………………

   (2) Précise la position relative des droites et plans suivants (précise leur éventuelle intersection) :

   a. la droite EC et le plan FGD………………………

   b. la droite AB et le plan EFC………………………

   c. la droite EI et le plan ABC………………………

   (3) Précise la position relative des droites suivantes (précise leur éventuelle intersection) :

   a. les droites AC et IC………………………

   b. les droites AB et AC………………………

   c. les droites AB et CG………………………

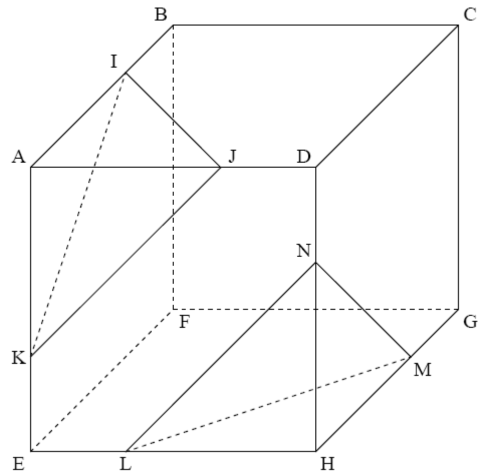
   d. les droites AB et DC………………………

   e. les droites AC et BD………………………

   f. les droites AB et EG………………………

2. $ABCDEFGH$ est un cube. I, J, K, L, M et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[AD]$, $[AE]$, $[EH]$, $[HG]$ et $[HD]$.

(1) Complète les phrases par l'un des mots suivants : « gauches », « parallèles confondues », « parallèles distinctes » ou « sécantes ».



AB et IJ sont …………………………...

AD et BC sont …………………………

AI et KJ sont ………………………….

KJ et LN sont ………………………….

KI et BF sont ………………………….

EF et LM sont …………………………

AE et CG sont …………………………

LM et IJ sont ………………………….

(2) Complète les phrases par l'un des mots suivants : « sécants en … », « parallèles », « confondus ».

Les plans ABD et AED sont ………………………….

Les plans AJK et LNH sont ………………………….

Les plans AEF et DCG sont ………………………….

Les plans LNH et EFG sont ………………………….

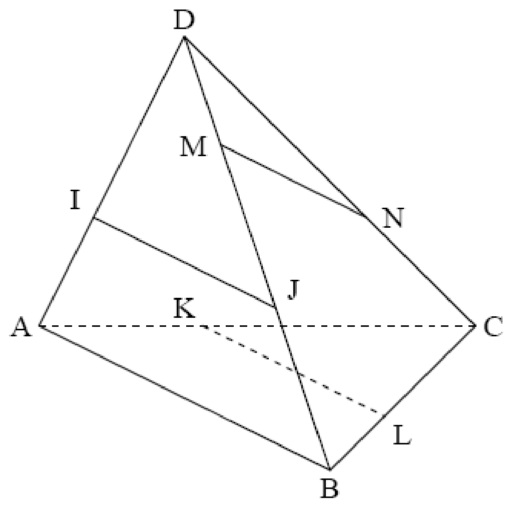
Les plans IJK et ABC sont ………………………….

Les plans AIJ et HLM sont …………………………

Les plans HMN et CIJ sont ………………………….

3. $ABCD$ est un tétraèdre. I, J, K, L, M et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AD]$, $[BD]$, $[AC]$, $[BC]$, $[BD]$ et $[CD]$. IJ et KL

sont parallèles à AB.



Que peut-on dire…

… de la droite IJ et du plan BCD ? ………………….

… des droites IJ et MN ? ………………………….

… des plans DMN et DIJ ? ………………………….

… de la droite KL et du plan ABC ? ……………..

… des droites KL et DB ? ………………………….

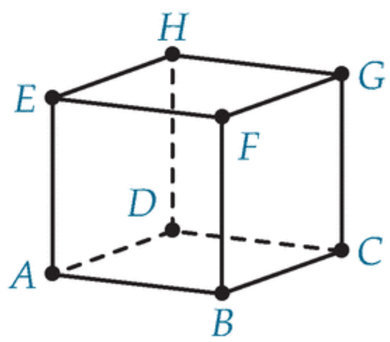
… des plans DMI et AJB ? ………………………….

… de la droite IJ et du plan ABC ? …………………

… des droites IJ et KL ? ………………………….

… de la droite KL et du plan ABD ? ……………..

4. On a représenté en perspective, ci-contre, un cube $ABCDEFGH$. Utilise cette figure pour citer deux droites NON matérialisées par un segment déjà tracé qui soient :



   a. parallèles distinctes ………………………

   b. sécantes ………………………

   c. non coplanaires ………………………

(3) Parallélisme

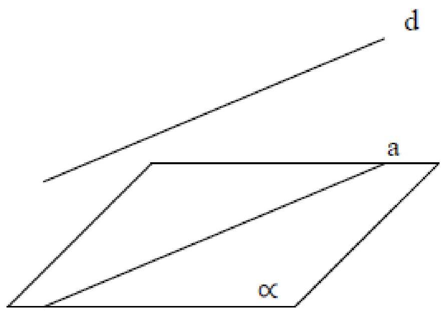
1.Parallélisme de deux droites

Définition : Deux droites sont parallèles si et seulement si elles sont confondues ou si elles sont coplanaires et n'ont aucun point commun.

Transitivité du parallélisme : Si deux droites sont parallèles à une même troisième, elles sont parallèles entre elles.

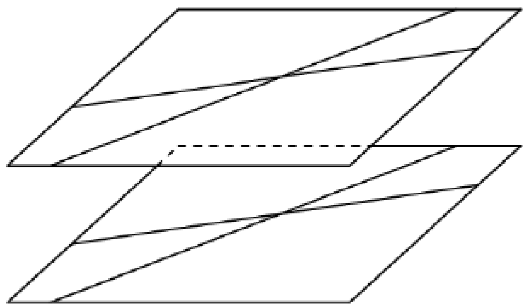
2.Parallélisme d'une droite et d'un plan

Théorème : Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.



3. Parallélisme de deux plans

Théorème : Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont respectivement parallèles à deux droites sécantes de l'autre.



B. Orthogonalité

(1) Activités

1. Le plus court chemin

Posez le cube face à vous.

1. Appelons M le point milieu de l'arête supérieure de la face avant de ce cube.
   a. Quel est le plus court chemin du point M à la face arrière du cube ?
   b. Quel est le plus court chemin du point M à un plan vertical diagonal du cube ?
2. Soit D et H les extrémités de l'arête verticale arrière gauche et soit I et J les milieux des arêtes horizontales de la face de droite. Appelons N le point situé sur l'arête verticale avant droite, aux trois quarts de la hauteur. Quel est le plus court chemin du point N au plan $DHIJ$?
3. Soit S un sommet quelconque du cube. Quel est le plus court chemin de S au plan passant par les autres sommets des trois arêtes contenant S ?

Dans un premier temps, vous êtes invités à manipuler le cube et à montrer le plus court chemin. Dans un second temps, vous devez décrire le plus court chemin de manière à ce que quelqu'un qui n'est pas présent puisse réaliser la construction : par quels points faut-il passer, quelle direction faut-il prendre ? N'hésitez pas à utiliser les éléments du cube.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

2. La planche à clou

Tu disposes d'un niveau d'eau, d'une équerre et d'un fil à plomb. Un long clou est planté dans une planche. Comment vérifier si ce clou est perpendiculaire à la planche ? Envisage chacun des cas suivants :

a) la planche est horizontale,

b) la planche est verticale,

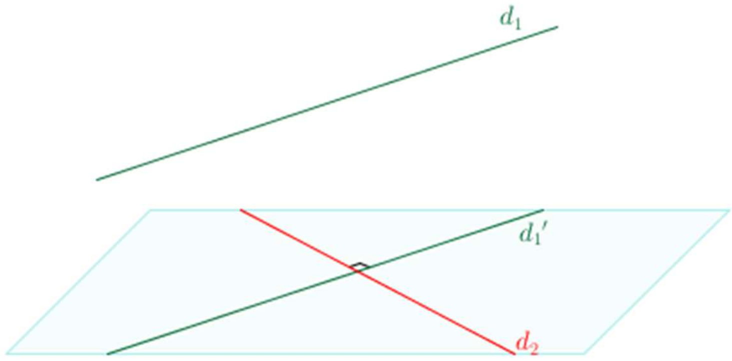
c) la planche est dans une position quelconque.

Enonce un critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan.

………
………
………
………
………
………

(2) Définitions

Définition : Deux droites de l'espace sont orthogonales si et seulement si une parallèle à l'une comprenant un point de l'autre est perpendiculaire à cette autre.

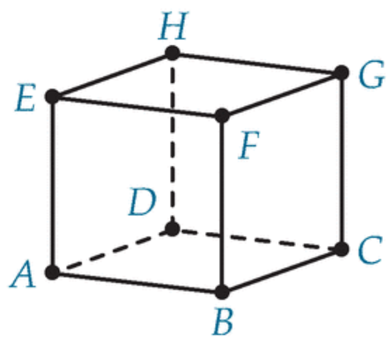


d_1 et d_2 sont orthogonales : la droite $d_1^{'}$ parallèle à d_1 et passant par un point de d_2 est bien perpendiculaire à d_2

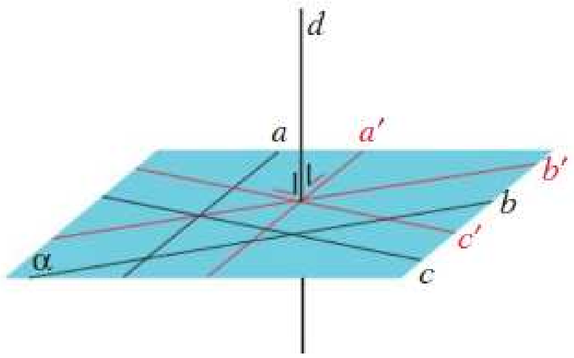
Remarque : On réserve le terme "perpendiculaires" pour des droites qui sont orthogonales et coplanaires.

La notation $a \perp b$ signifie que les droites a et b sont orthogonales (ou perpendiculaires).

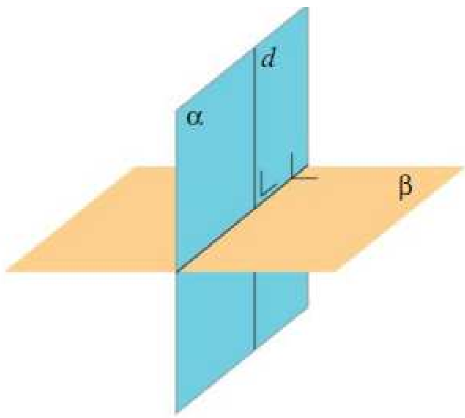
Exemple : Les droites *EF* et *GC* sont orthogonales dans le cube ci-contre car….



Définition : Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans ce plan.



Définition : Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

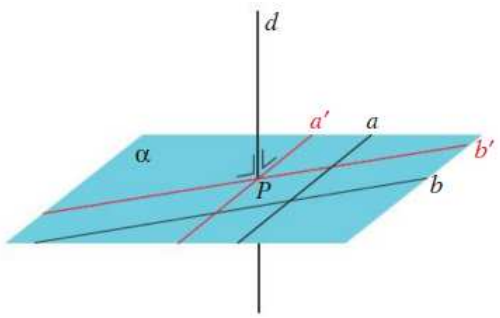


(3) Propriétés

Propriété 1 : Il n'existe qu'une seule droite perpendiculaire à un plan donné et comprenant un point donné.

Propriété 2 : Il n'existe qu'un seul plan perpendiculaire à une droite donnée et comprenant un point donné.

Théorème : *Critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan :*
Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



Démonstration :

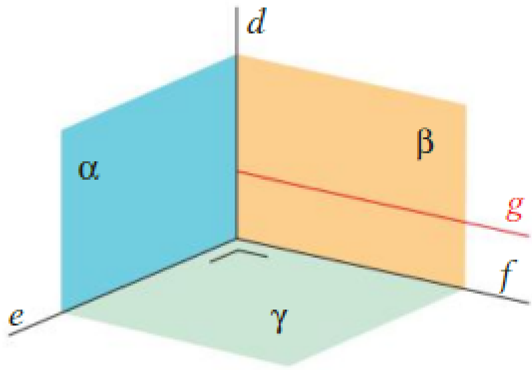
Théorème : *Critère d'orthogonalité de deux droites :*

Deux droites sont orthogonales si et seulement si l'une est incluse dans un plan perpendiculaire à l'autre.

Démonstration :

Théorème : *Critère de perpendicularité de deux plans :*

Deux plans α et β, sécants suivant une droite d, sont perpendiculaires si et seulement si les intersections de tout plan γ perpendiculaire à d, avec respectivement α et β, sont deux droites perpendiculaires.



Démonstration :

(5) Perpendiculaire commune à deux droites gauches

Théorème : Il existe une et une seule droite perpendiculaire à deux droites gauches données.

Construction :

Démonstration :

C. Exercices

Démontre les propriétés géométriques classiques suivantes :

(1) Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale aux droites de ce plan, ainsi qu'aux parallèles de ce plan.

(2) Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule droite perpendiculaire à un plan donné.

(3) Si une droite est perpendiculaire à un plan α, alors cette droite est parallèle à tout plan parallèle à α.

(4) Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

(5) Si deux plans sécants sont perpendiculaires à un même troisième plan, leur intersection est perpendiculaire à ce troisième plan.

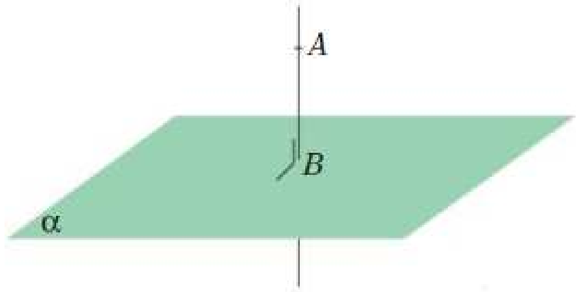
(6) Si une droite et un plan sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux

D. Distances

(1) Distance d'un point à un plan

Définition : La distance d'un point à un plan est la longueur du segment qui joint ce point au pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan.

Par un point donné, on ne peut tracer qu'une seule perpendiculaire à un plan donné. La distance du point au plan est la longueur du segment joignant le point au point de percée de la perpendiculaire dans le plan.

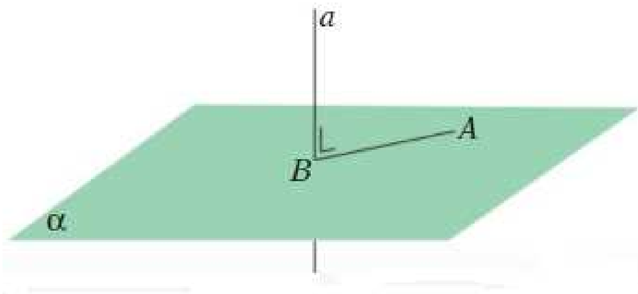


$$d(A,\alpha)=|AB|$$

(2) Distance d'un point à une droite

Définition : La distance d'un point à une droite est la longueur du segment qui joint ce point au pied de la perpendiculaire menée à la droite par ce point.

On sait qu'il n'existe qu'un seul plan perpendiculaire à une droite donnée comprenant un point donné. Le point de percée de la droite dans le plan est le pied de la perpendiculaire abaissée du point donné sur la droite donnée.

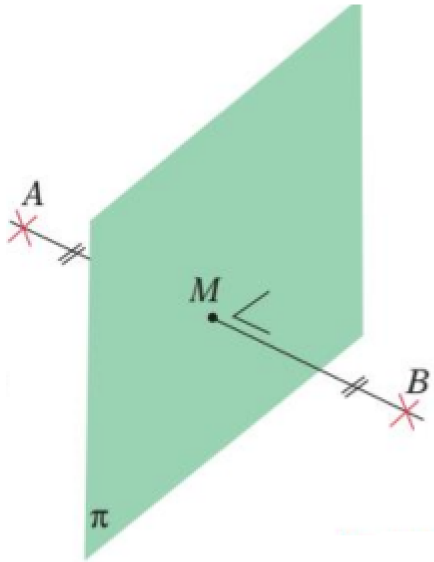


$$d(A,\alpha)=|AB|$$

(3) Distance entre deux droites gauches

Définition : La distance entre deux droites gauches est la longueur du segment défini par les points d'intersection de ces droites avec leur perpendiculaire commune.

E. Plan médiateur



Théorème : Le lieu des points équidistants de deux points distincts A et B de l'espace est le plan perpendiculaire à la droite AB comprenant le milieu du segment $[AB]$.

Démonstration :

2^{e}partie : La géométrie analytique

Objectifs : Géométrie analytique et synthétique de l'espace **5ème 6h**

2^e partie : La géométrie analytique

L'élève doit ***SAVOIR :***

1. Définir "vecteur directeur".
2. Donner l'équation vectorielle d'un plan et ses équations paramétriques(formules).
3. Définir "matrice", "déterminant", "mineur", "cofacteur".
4. Calculer le déterminant d'une matrice.
5. Donne l'équation cartésienne d'un plan (formule)
6. Définir "vecteur normal".
7. Donner l'équation vectorielle d'une droite, ses équations paramétriques et son équation cartésienne (formules).
8. Donner les conditions de parallélisme entre deux droites, deux plans ou une droite et un plan.
9. Donner les conditions d'orthogonalité entre deux droites, deux plans ou une droite et un plan.
10. Donner les positions relatives de deux droites, deux plans, d'une droite et d'un plan, de trois plans.
11. Expliquer comment calculer la distance d'un point à un plan ou à une droite.

L'élève doit ***ETRE CAPABLE DE :***

1. Représenter un plan ou une droite dans un repère orthonormé de l'espace.
2. Etablir les équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes d'une droite ou d'un plan à partir d'éléments qui le déterminent.
3. Etablir l'orthogonalité (perpendicularité) ou le parallélisme de deux droites, de deux plans ou d'une droite et un plan.

4. Déterminer la position relative de deux droites, deux plans ou d'une droite et d'un plan et donner l'éventuel élément d'intersection.
5. Utiliser la méthode de Gauss pour résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues et en donner une interprétation géométrique.
6. Calculer la distance entre un point et une droite, entre un point et un plan, entre deux droites parallèles, entre deux plans parallèles ou entre deux droites gauches.
7. Déterminer l'équation du plan médiateur d'un segment.
8. Discuter, en fonction d'un paramètre, l'intersection d'une droite avec une famille de plans ou d'un plan avec une famille de droites
9. Résoudre un exercice faisant intervenir l'ensemble des notions vues dans ce chapitre.

« Dans la vie il faut éviter trois figures géométriques : les cercles vicieux, les triangles amoureux et les esprits trop carrés. »

Mario Benedetti

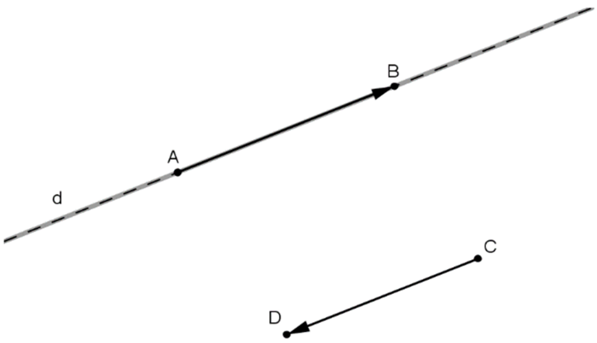
A. Combinaison linéaire et vecteur directeur

(1) Combinaison linéaire

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Le vecteur $\vec{w} = k\vec{u} + l\vec{v}$, où k et l sont des réels, est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(2) Vecteur directeur



Soit A et B deux points de la droite d.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ donne la **direction** de la droite d.

Définition : On appelle **vecteur directeur** d'une droite d tout vecteur non nul parallèle à un vecteur défini par deux points distincts de cette droite.

Ainsi, $\overrightarrow{CD}$ est également un vecteur directeur de d.

B. Equations de plans

On peut déterminer un plan de différentes façons :

- 3 points non alignés
- 1 droite et 1 point ne lui appartenant pas
- 2 droites sécantes
- …

On raisonnera par la suite avec le fait que 3 points non alignés déterminent un plan.

(1) Equation vectorielle

Considérons le plan π déterminé par 3 points non alignés A, B et C.

Soit X un point quelconque de ce plan.

$X \in \pi \iff \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AX}$ sont coplanaires.

$\iff \overrightarrow{AX}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\iff \overrightarrow{AX} = k.\overrightarrow{AB} + l.\overrightarrow{AC}$ *Equation vectorielle de* π

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des *vecteurs directeurs* de π.

(2) Equations paramétriques

Soit les points $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ et $C(x_C; y_C; z_C)$ déterminant le plan π. Soit $X(x; y; z)$ un point quelconque de π.

$$X \in \pi \iff \overrightarrow{AX} = k.\overrightarrow{AB} + l.\overrightarrow{AC}$$

$$\iff (x - x_A; y - y_A; z - z_A) = k.(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) + l.(x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A)$$

$$\iff \begin{cases} x = k.(x_B - x_A) + l.(x_C - x_A) + x_A \\ y = k.(y_B - y_A) + l.(y_C - y_A) + y_A \\ z = k.(z_B - z_A) + l.(z_C - z_A) + z_A \end{cases}$$

Exemple : Déterminons des équations paramétriques du plan π déterminé par les points $A(1;0;2)$, $B(2;2;0)$ et $C(0;1;1)$.

Note : Chaque choix d'une valeur pour chaque paramètre permet de calculer les coordonnées d'un point du plan.

Dans l'exemple, si $k=2$ et $l=3$, on trouve ....

Ainsi, le point .... appartient au plan π.

(3) Matrice et déterminant

Pour obtenir l'équation cartésienne d'un plan à partir de ses équations paramétriques, on doit éliminer les paramètres k et l. Pour cela, on se sert du calcul matriciel et en particulier du déterminant d'une matrice.

1. Matrice

Définition : Une **matrice** A, de genre $p \times n$, est un tableau de nombres réels, comprenant p lignes et n colonnes $\left(p, n \in \mathbb{N}_0\right)$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de genre 3×4.

La place d'un élément (ou d'un terme) dans ce tableau est désignée par un double indice, le premier indiquant la ligne et le second la colonne où se trouve l'élément. Ainsi, a_{35} désigne l'élément se trouvant au croisement de la 3ème ligne et de la 5èmecolonne.

Le terme général est désigné par a_{ij}, avec $1 \le i \le p, 1 \le j \le n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Remarques :

- Une matrice dont tous les éléments sont nuls est appelée **matrice nulle**.
- Une matrice carrée est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes. Ce nombre est alors appelé **ordre** de la matrice.

2. *Déterminant*

Définition : Le **déterminant** d'une matrice carrée A est un réel associé à cette matrice ; il est noté $\text{dét}\, A$ ou $|A|$. Le déterminant :

- d'une matrice d'ordre 1 est égal à la valeur de son unique terme ;
- de la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ d'ordre 2 est le réel $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$
- de la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ d'ordre 3 est le réel

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

On peut associer un déterminant à toute matrice carrée. La formule du déterminant pour les matrices d'ordre 3 est longue et difficile à mémoriser. Il existe deux méthodes pour calculer ce déterminant ; nous n'en utiliserons qu'une appelée « Règle de Sarrus ».

Toutefois, cette règle n'est valable que pour les matrices carrées d'ordre 3 !

Pour calculer un déterminant par la règle de Sarrus, on recopie les deux premières colonnes à la droite du déterminant, on effectue la somme des produits des termes des diagonales « descendantes » et on soustrait les produits des termes des diagonales « montantes ».

<u>Exemple :</u> Calculons le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Exercices

Calcule le déterminant des matrices suivantes :

$$(1)\ \begin{pmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(2)\ \begin{pmatrix} 19 & 1 & 5 \\ 19 & -1 & 5 \\ 19 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(3)\ \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 5 \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2a \\ a & a & a \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(4) Equation cartésienne d'un plan

Considérons le plan π passant par le point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les équations paramétriques de ce plan peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k. \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix} + l. \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \\ z_{\vec{v}} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} x - x_A & x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y - y_A & y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \\ z - z_A & z_{\vec{u}} & z_{\vec{v}} \end{pmatrix}$.

Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non parallèles du plan, ils sont non nuls et non multiples l'un de l'autre. De même, leurs composantes ne sont pas toutes nulles simultanément et ne sont pas proportionnelles. Dès lors, les deux dernières colonnes de la matrice M ne sont pas entièrement nulles et ne sont pas proportionnelles.

Par contre, l'écriture (*) signifie que les composantes du vecteur $\overrightarrow{AX}$ sont des combinaisons linéaires des composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La première colonne de la matrice M est donc combinaison linéaire des deux autres colonnes. Ainsi, grâce à une propriété des matrices, on peut écrire

$$\begin{vmatrix} x-x_A & x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y-y_A & y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \\ z-z_A & z_{\vec{u}} & z_{\vec{v}} \end{vmatrix} = 0$$

Il s'agit d'une équation cartésienne du plan π passant par le point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

<u>Exemple :</u> Ecrivons une équation cartésienne du plan suivant :

$$\begin{cases} x = k - l + 1 \\ y = 2k + l \\ z = -2k - l + 2 \end{cases}$$

La formule générale de <u>**l'équation cartésienne**</u> d'un plan est

<u>Définition :</u> Le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est un <u>**vecteur normal**</u> du plan π. C'est un vecteur non nul orthogonal à tout vecteur de ce plan.

(5) Représenter un plan à partir de son équation cartésienne

Soit $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$.

1^er cas : Les coefficients a, b et c sont tous trois non nuls : le plan π coupe chacun des axes du repère.

Exemple : Soit $\pi \equiv 4x + 6y + 3z - 12 = 0$.

2ème cas : Un ou deux coefficients sont nuls : le plan est parallèle à un axe ou à un plan du repère.

Exemple : Soit $\pi \equiv 4x + 3z - 12 = 0$.

(6) Exercices

1. Ecris des équations paramétriques du plan π comprenant les points $A(0;4;5)$, $B(1;-5;1)$ et $C(0;-1;6)$.

2. Ecris des équations paramétriques du plan π comprenant le point $P(1;-2;0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(-1;1;0)$ et $\vec{v}(1;2;-3)$.

3. Soit le plan $\pi \equiv \begin{cases} x = k - l + 3 \\ y = l - 1 \\ z = -2k - l + 2 \end{cases}$.

   (1) Détermine les coordonnées du point M si $k = 0$ et $l = -1$.

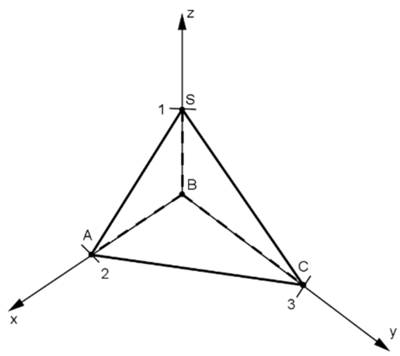
   (2) Donne les coordonnées d'un point S appartenant à π, différent de M.

4. On considère les points $R(2;-1;1)$, $S(0;5;2)$ et $T(-4;5;1)$. Quelles sont les coordonnées de point U appartenant au plan RST tel que la cote et l'ordonnée de U soient égales et dont l'abscisse vaut le double de la cote ?

5. On donne, ci-contre, le tétraèdre $SABC$ ainsi qu'un repère cartésien.

   (1) Détermine les coordonnées de chaque sommet.

   (2) Ecris des équations paramétriques du plan SAC.



6. Représente et écris une équation cartésienne du plan :

   (1) π_1 parallèle au plan Oxy et situé 3 unités en dessous de celui-ci ;

   (2) π_2 parallèle au plan Oyz et passant par le point $(4;-3;2)$;

   (3) π_3 perpendiculaire à l'axe Oz au point $(0;0;6)$;

   (4) π_4 parallèle au plan Oxz et situé 6 unités derrière celui-ci.

7. Recherche une équation cartésienne du plan $\alpha \equiv \begin{cases} x = 2k + 5l \\ y = 3k \\ z = -k + 6l \end{cases}$.

8. Détermine une équation cartésienne du plan π comprenant les points $A(2;-1;1)$, $B(0;5;2)$ et $C(-4;5;1)$. Donne un vecteur normal de ce plan.

9. Détermine une équation cartésienne du plan π passant par $A(1;2;-3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1;-2;3)$ et $\vec{v}(3;2;1)$.

10. Représente la trace du plan $\alpha \equiv 3x+2y+2z=6$ sur les plans d'un repère.

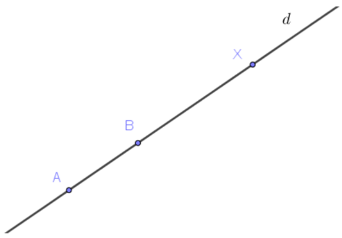
11. Détermine des équations paramétriques du plan $\pi \equiv -3x+2y+z-1=0$.

12. Détermine une équation cartésienne du plan β de vecteur normal $\vec{n}(1;2;-1)$ et passant par le point $P(3;-5;-3)$.

13. Détermine les coordonnées du point d'intersection du plan $\begin{cases} x=2k+l-5 \\ y=-3k-2l+4 \\ z=k+3l-1 \end{cases}$ avec l'axe des ordonnées.

C. Equations de droites

(1) Equation vectorielle



Considérons la droite d déterminée par 2 points distincts A et B.

Soit X un point quelconque de cette droite.

$X \in d \Leftrightarrow$ A, B et X sont alignés

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AX}$ sont parallèles

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AX} = k.\overrightarrow{AB}$ *Equation vectorielle de d*

$\overrightarrow{AB}$ est un *vecteur directeur* de d.

(2) Equations paramétriques

Soit la droite d passant par les points distincts $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. Soit $X(x; y; z)$ un point quelconque de d.

$$X \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} = k.\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A; y - y_A; z - z_A) = k.(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k.(x_B - x_A) + x_A \\ y = k.(y_B - y_A) + y_A \\ z = k.(z_B - z_A) + z_A \end{cases}$$

<u>Exemple :</u> Déterminons des équations paramétriques de la droite d déterminée par les points $A(5;-1;2)$ et $B(-3;3;4)$.

(3) Equations cartésiennes

Pour obtenir l'équation cartésienne d'une droite à partir de ses équations paramétriques, on doit éliminer le paramètre k.

Reprenons les équations paramétriques d'une droite comprenant le point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(x_u ; y_u ; z_u)$:

On peut donc écrire la **formule canonique des équations cartésiennes** d'une droite :

Exemple : Ecrivons une équation cartésienne de la droite $d \equiv \begin{cases} x = -8k + 5 \\ y = 4k - 1 \\ z = 2k + 2 \end{cases}$.

La **formule générale des équations cartésiennes** d'une droite est donnée par le système formé des équations de deux plans sécants :

$$d \equiv \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Il faut donc deux équations cartésiennes pour définir une droite, toujours considérée comme l'intersection de deux plans.

(4) Exercices

1. Ecris des équations paramétriques et une équation cartésienne de la droite AB si

   (1) $A(-1;2;3)$ et $B(0;4;-1)$

   (2) $A(4;-1;3)$ et $B(0;-1;-2)$

2. Détermine des équations paramétriques et cartésiennes de la droite d comprenant le point $A(2;1;-2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(0;-1;2)$.

3. Détermine des équations paramétriques et un vecteur directeur de la droite d parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point $A(3;4;2)$.

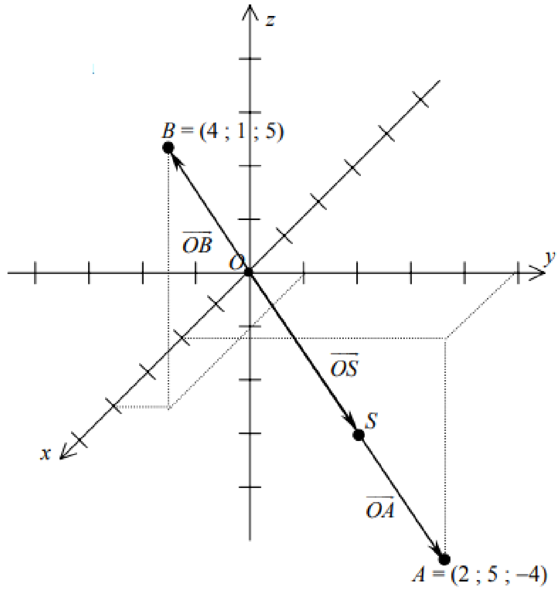
4. Donne les coordonnées d'un point et les composantes d'un vecteur directeur de la droite $d \equiv \dfrac{x+3}{2} = y-1 = \dfrac{z-2}{4}$.

5. On considère, dans un repère orthonormé, les points $A(2;5;-4)$ et $B(4;1;5)$.

   (1) Détermine les coordonnées du point S satisfaisant l'égalité $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

   (2) Détermine une équation cartésienne de la droite AB.

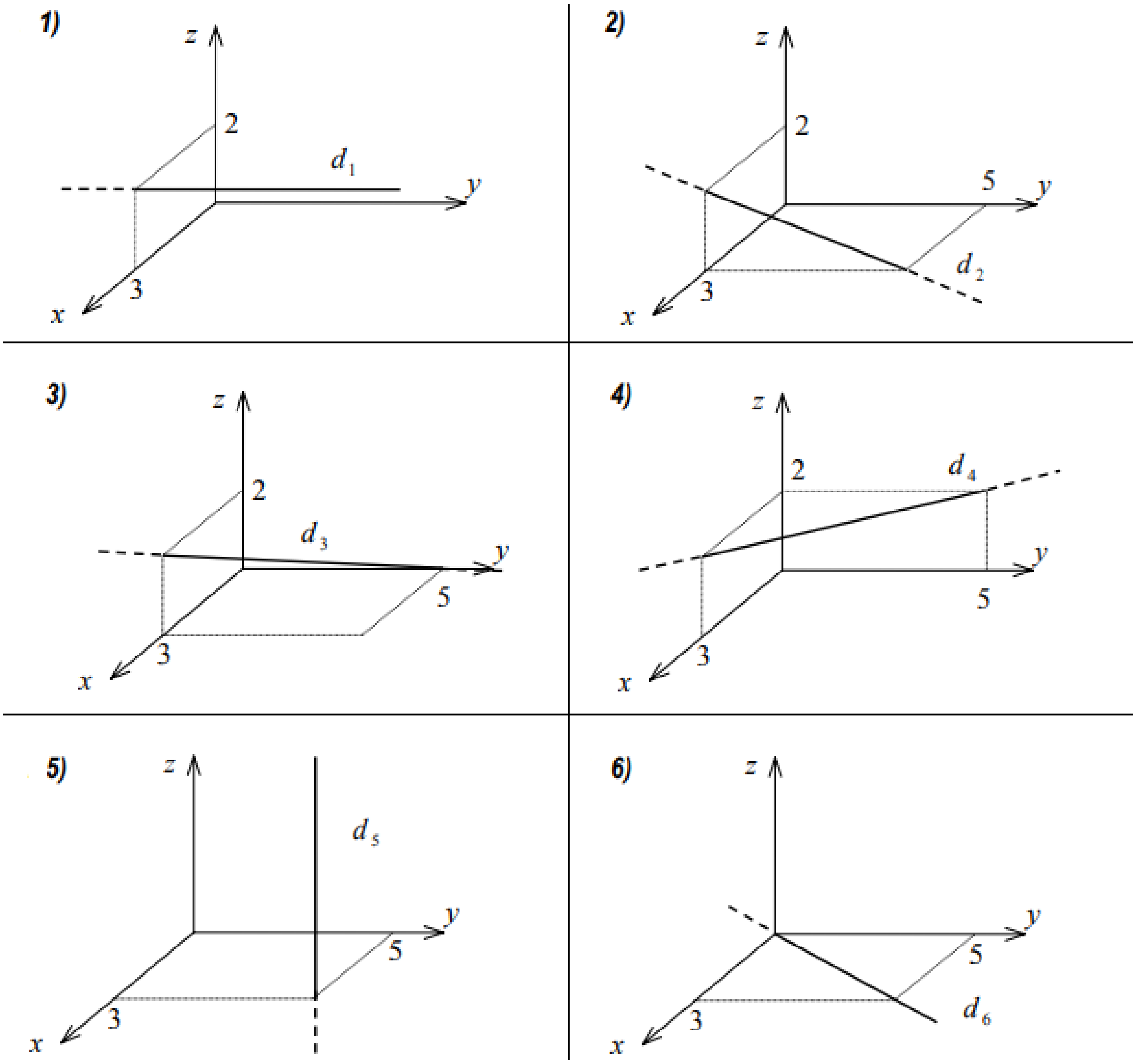
   (3) Le point S appartient-il à la droite AB comme le suggère la représentation ci-contre ?



6. Détermine une équation cartésienne de la droite $d \equiv \begin{cases} -3x+2y+3=0 \\ y+z-5=0 \end{cases}$

La droite est donnée par 2 équations cartésiennes de <u>plans</u>.
L'astuce pour déterminer son équation cartésienne est d'isoler la lettre commune dans chaque équation.

7. Détermine des équations paramétriques et des équations cartésiennes des droites représentées ci-dessous :



D. Conditions de parallélisme et d'orthogonalité

(1) Parallélisme de deux droites

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont parallèles.

Exemple : Les droites $d \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = z+2$ et $d' \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}$ sont parallèles car

....

(2) Parallélisme de deux plans

Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont parallèles.

Exemple : Les plans $\pi \equiv 3y + z - 2 = 0$ et $\pi' \equiv -3y - z + 5 = 0$ sont parallèles car

....

(3) Parallélisme d'une droite et d'un plan

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à un vecteur normal du plan.

Exemple : La droite $d \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = -z$ et le plan $\pi \equiv x - 2y - 7z + 4 = 0$ sont parallèles car

....

(4) Orthogonalité de deux droites

Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Exemple : Les droites $d \equiv \frac{x+5}{-2} = \frac{y}{3} = z-1$ et $d' \equiv \frac{x+2}{2} = y+1 = z+3$ sont orthogonales car

....

(5) Perpendicularité de deux plans

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

<u>Exemple :</u> Les plans $\pi \equiv x - 2y + 3z + 1 = 0$ et $\pi' \equiv 17x + y - 5z - 3 = 0$ sont perpendiculaires car ....

(6) Perpendicularité d'une droite et d'un plan

Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est parallèle à un vecteur normal du plan.

<u>Exemple :</u> La droite $d \equiv \begin{cases} 5x + 2y + 3 = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ et le plan $\pi \equiv 2x - 5y = 3$ sont perpendiculaires car ....

Le saviez-vous ?

La notion d'orthogonalité est peut-être le jour où un hominidé préhistorique a acquis la station debout et a ressenti la verticalité. Qui sait ?

Le préfixe *ortho* est utilisé en mathématiques pour donner *orthogonal*, *orthonormé*, *orthocentre*, … mais aussi pour construire des mots parfois très éloignés des sciences.

On retrouve par exemple ce préfixe dans *orthographe*, *orthodoxe*, *orthopédie*, …

Tous ces mots proviennent du grec *orthos*, qui signifie droit, correct. Ceux qui ont subi des traitements *d'orthodontie* savent toute la signification de ce préfixe…

Orthogonal est aussi construit à partir du mot grec *gonia*, qui signifie angle ou coin, et que l'on retrouve dans la trigonométrie.

(7) Exercices

1. Détermine des équations paramétriques du plan π' parallèle au plan $\pi \equiv \begin{cases} x = 2k - l + 3 \\ y = -k + 2l + 5 \\ z = -l - 3 \end{cases}$ et comprenant le point $P(1;0;-2)$.

2. Détermine la valeur de m et p pour que les plans $\alpha \equiv 2x + my + 3z - 5 = 0$ et $\beta \equiv px - 6y - 6z + 2 = 0$ soient parallèles.

3. Les droites suivantes sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

   (1) $d \equiv \begin{cases} x = 2k - 1 \\ y = -k + 2 \\ z = 6k - 3 \end{cases}$ et $d' \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{3}k' + 2 \\ y = -\frac{k'}{6} - 1 \\ z = k' + 1 \end{cases}$

   (2) $d \equiv \frac{x}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-4}$ et $d' \equiv \frac{x}{3} = \frac{3y-1}{2} = \frac{3z+5}{4}$

   (3) AB et CD avec $A(6;4;-4)$, $B(4;0;-2)$, $C(7;0;-2)$ et $D(11;-4;0)$

4. Ecris des équations cartésiennes de la droite d' parallèle à la droite $d \equiv \begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{z}{3} \\ y = 5 \end{cases}$ et comprenant le point $P(2;-1;3)$.

5. Vérifie si la droite $d \equiv \begin{cases} x = 3k + 2 \\ y = k + 1 \\ z = 2k + 4 \end{cases}$ est parallèle au plan $\pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0$.

6. Les droites $d \equiv \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{\frac{1}{2}} = z$ et $d' \equiv x = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{2}$ sont-elles orthogonales ?

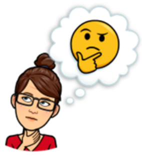
7. La droite $d \equiv \frac{x-1}{2} = y = \frac{z}{5}$ est-elle perpendiculaire au plan $\pi \equiv 5x + 2y - 7z + 5 = 0$?

8. Les plans $\pi \equiv 2x - 3z = 0$ et $\pi' \equiv 4x + 2y - z = 0$ sont-ils perpendiculaires ?

9. Détermine une équation cartésienne de la droite d comprenant le point $P(0;4;5)$ et perpendiculaire au plan $\pi \equiv -x - y + 2z = 0$.

10. Détermine une équation cartésienne du plan π comprenant le point $P(-1;0;1)$ et perpendiculaire à la droite $d \equiv \frac{x-2}{3} = y = \frac{z-1}{-1}$.

__Pour chercher :__



On donne des équations cartésiennes de trois droites d_1, d_2, d_3 de l'espace :

$$d_1 : \frac{x-1}{2} = -y = \frac{z+1}{3}, \quad d_2 : \frac{x}{3} = y + 1 = \frac{z-2}{5}, \quad d_3 : \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

a) Donner une équation du plan α contenant d_1 et parallèle à d_3.

b) Donner une équation du plan β contenant d_2 et parallèle à d_3.

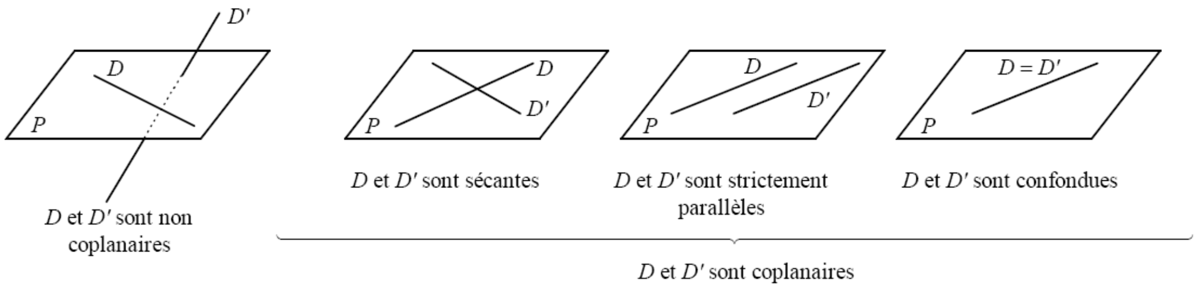
c) Donner les équations de la droite d s'appuyant sur d_1 et d_2 et parallèle à d_3.

(*Examen d'admission, ULg, 2001*)

E. Intersection de droites et de plans

(1) Positions relatives de deux droites

Pour déterminer analytiquement l'intersection de deux droites, on résout le système formé par les équations des deux droites.



En général, l'utilisation des équations paramétriques des deux droites facilite la recherche de leur intersection.

Soit la droite *d* de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par le point A.

Soit la droite d' de vecteur directeur $\vec{v}$ et passant par le point B.

On a : $d \equiv \begin{cases} x = k.x_{\vec{u}} + x_A \\ y = k.y_{\vec{u}} + y_A \\ z = k.z_{\vec{u}} + z_A \end{cases}$ et $d' \equiv \begin{cases} x = k'.x_{\vec{v}} + x_B \\ y = k'.y_{\vec{v}} + y_B \\ z = k'.z_{\vec{v}} + z_B \end{cases}$.

Le système à résoudre est donc de la forme :

$$\begin{cases} k.x_{\vec{u}} + x_A = k'.x_{\vec{v}} + x_B \\ k.y_{\vec{u}} + y_A = k'.y_{\vec{v}} + y_B \\ k.z_{\vec{u}} + z_A = k'.z_{\vec{v}} + z_B \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de **trois** équations à **deux** inconnues, on résout d'abord le système formé par deux de ces équations. On obtient alors des valeurs pour k et k', et on vérifie que ces nombres satisfont également la troisième équation.

Trois cas peuvent se produire :

- Un seul couple de réel (k,k') convient : les droites sont **sécantes** en un point.
- k et k' peuvent prendre n'importe quelles valeurs (on a un système indéterminé) : les droites sont **confondues**.
- Il n'y a pas de valeur pour k et k' (on a un système impossible) : les droites n'ont pas de point d'intersection. Ces deux droites sont donc gauches ou parallèles distinctes. La recherche de leurs vecteurs directeurs permettra de distinguer les deux cas.

Note : La recherche des vecteurs directeurs est rapide et permet de savoir si les deux droites sont parallèles. ➔ On commencera donc un exercice d'intersection de droites en étudiant leur parallélisme.

Exemple : Déterminons l'intersection des droites $d_1 \equiv \begin{cases} x = k+1 \\ y = 3k+1 \\ z = -k+3 \end{cases}$ et $d_2 \equiv \begin{cases} x = -k'+3 \\ y = 2k'+2 \\ z = k'+1 \end{cases}$.

Exercices :

1. Détermine la position relative et l'intersection éventuelle des droites d_1 et d_2 :

(1) $d_1 \equiv \begin{cases} x = -\lambda+1 \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda-2 \end{cases}$ et $d_2 \equiv \begin{cases} x = \mu+2 \\ y = -3\mu-4 \\ z = -\mu-1 \end{cases}$

(2) $d_1 \equiv \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-1}{4}$ et $d_2 \equiv \dfrac{x-8}{12} = \dfrac{y+4}{8} = \dfrac{z-2}{16}$

(3) $d_1 \equiv \begin{cases} x+5y=3 \\ 2y+z=2 \end{cases}$ et $d_2 \equiv \begin{cases} x-y=3 \\ 3x+z=-6 \end{cases}$

(4) $d_1 \equiv \begin{cases} \dfrac{x}{-2}=\dfrac{z+1}{3} \\ y=5 \end{cases}$ et $d_2 \equiv \begin{cases} 3x+2z=4 \\ y-5=0 \end{cases}$

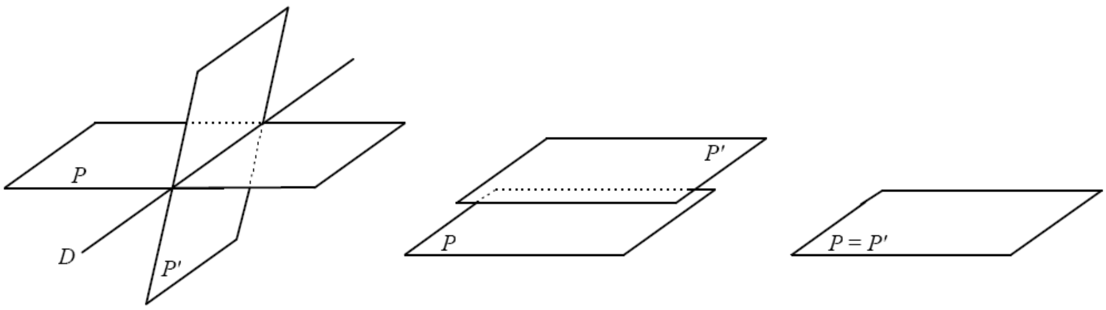
(5) $d_1 \equiv \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{-1}$ et $d_2 \equiv \begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ y+3z=0 \end{cases}$

(6) $d_1 \equiv \dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-2}{-3}$ et $d_2 \equiv \begin{cases} 2x+3y=-1 \\ x-z=-3 \end{cases}$

2. On donne les points $A(3;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;3)$ et $D(2;2;p)$.
   (1) Pour quelles valeurs de p les droites AB et CD sont-elles sécantes ?
   (2) Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?

(2) Positions relatives de deux plans

Pour déterminer analytiquement l'intersection de deux plans, on résout le système formé par les équations des deux plans.



P et *P'* sont sécants suivant la droite *D*

P et *P'* sont strictement parallèles

P et *P'* sont confondus

P et *P'* sont parallèles

- 1ère situation : On donne les équations cartésiennes des deux plans.
  Il s'agit d'un système de **deux** équations à **trois** inconnues ; on cherche à éliminer deux inconnues (x, y ou z) pour écrire l'équation cartésienne de l'éventuelle droite d'intersection.
- 2ème situation : On donne les équations paramétriques des deux plans.
  Il s'agit d'un système de **trois** équations à **quatre** inconnues. On se ramènera à la 1ère situation en déterminant l'équation cartésienne de chaque plan.

Trois cas peuvent se présenter lors de la résolution du système :

- Le système est impossible : cela signifie que les deux plans sont **strictement parallèles**.
- Le système est indéterminé, il admet une infinité de solutions.
  - Les deux plans sont **confondus**.
  - L'intersection des deux plans est une **droite**.

Note : La recherche des vecteurs normaux est rapide et permet de savoir si les deux plans sont strictement parallèles ou confondus. ➔ On commencera donc un exercice d'intersection de plans en étudiant leur parallélisme.

Exemple : Déterminons la position relative et l'intersection des plans $\alpha \equiv 2x+3y-5z-1=0$ et $\beta \equiv -x+2y+z+2=0$.

Exercices :

1. Détermine la position des plans α et β. S'ils sont sécants, donne une équation cartésienne de leur droite d'intersection, sous forme canonique.

   (1) $\alpha \equiv x+3y-5z=2$ et $\beta \equiv -x+y+z=6$

   (2) $\alpha \equiv -2x+y+3z+6=0$ et $\beta \equiv x-5z=0$

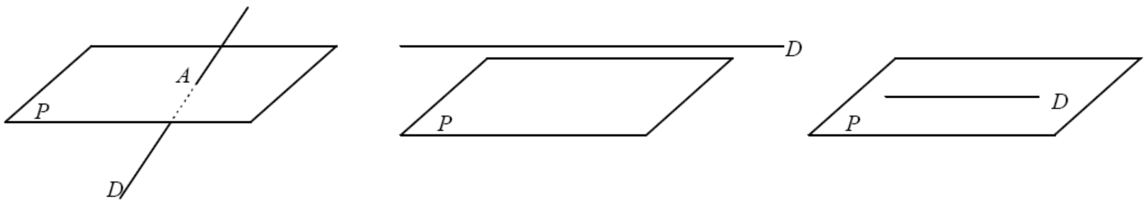
   (3) $\alpha \equiv 3x-2y+z=7$ et $\beta \equiv 2z=4y-6x+3$

   (4) $\alpha \equiv \begin{cases} x=-k+l+1 \\ y=k+2l-2 \\ z=-3l \end{cases}$ et $\beta \equiv \begin{cases} x=-2k'-6l'+2 \\ y=6k'+6l'-1 \\ z=k'+1 \end{cases}$

2. Détermine la position relative et l'éventuelle intersection des plans $\alpha \equiv 2x+y-z-2=0$ et $\beta \equiv x+3y+7z-11=0$.

(3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Pour déterminer analytiquement l'intersection d'une droite et d'un plan, on résout le système formé par les équations de la droite et celle du plan.



D et *P* sont sécants en *A*

D est strictement parallèle à *P*

D est incluse dans *P*

D et *P* sont parallèles

Il est plus facile de résoudre le système formé par l'équation cartésienne du plan et les équations paramétriques de la droite.

Soit le plan $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$ et la droite $d \equiv \begin{cases} x=k.x_{\vec{u}}+x_A \\ y=k.y_{\vec{u}}+y_A \\ z=k.z_{\vec{u}}+z_A \end{cases}$.

Le système à résoudre est donc de la forme :

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ x=k.x_{\vec{u}}+x_A \\ y=k.y_{\vec{u}}+y_A \\ z=k.z_{\vec{u}}+z_A \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de **quatre** équations à quatre inconnues qu'on peut facilement transformer en une seule équation (d'inconnue *k*) en remplaçant les expressions x, y et z de la droite dans l'équation du plan :

$$a\left(k.x_{\vec{u}}+x_A\right)+b\left(k.y_{\vec{u}}+y_A\right)+c\left(k.z_{\vec{u}}+z_A\right)+d=0.$$

Trois cas peuvent se produire par rapport à cette dernière équation :

- L'équation n'a pas de solution : la droite est **parallèle** au plan.
- L'équation admet une infinité de solutions (tout nombre réel *k* convient) : la droite est **contenue** dans le plan.
- L'équation admet une seule solution : la droite **coupe** le plan en un point.

<u>Exemple :</u> Déterminons l'intersection de la droite $d \equiv \frac{x-1}{3}=\frac{y+5}{-2}=z$ et du plan $\pi \equiv x-4y+3z-7=0$.

Exercices :

Détermine la position du plan π et de la droite d :

(1) $\pi \equiv 3x + y - z + 6 = 0$ et $d \equiv \begin{cases} x = 4k - 9 \\ y = -4 \\ z = -6k + 20 \end{cases}$

(2) $\pi \equiv \begin{cases} x = 2k - l + 2 \\ y = k + 3l \\ z = -1 + k + l \end{cases}$ et $d \equiv \begin{cases} x = k' + 3 \\ y = -k' + 2 \\ z = 1 \end{cases}$

(3) $\pi \equiv 2x - y - z - 8 = 0$ et $d \equiv \begin{cases} x = 4k + 1 \\ y = 5k + 2 \\ z = 3k + 6 \end{cases}$

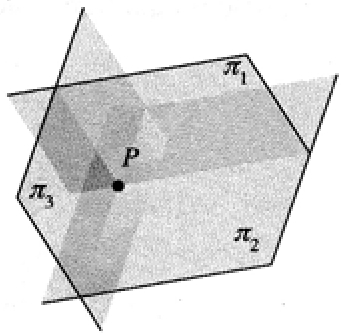
(4) $\pi \equiv 3x + z = -1$ et $d \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + y - 3z = 1 \end{cases}$

(4) Positions relatives de trois plans

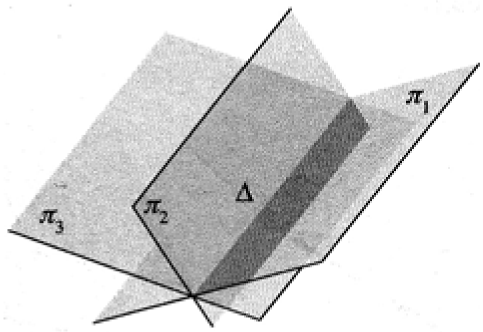
A partir de la solution du système à 3 inconnues formé par les équations cartésiennes des 3 plans, on peut en donner une interprétation géométrique.

Quatre cas peuvent se présenter :

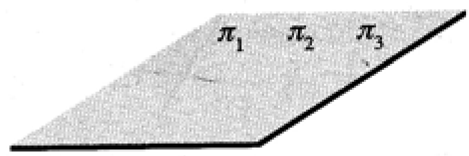
- Le système a une solution unique : les coordonnées du **point d'intersection** des trois plans.



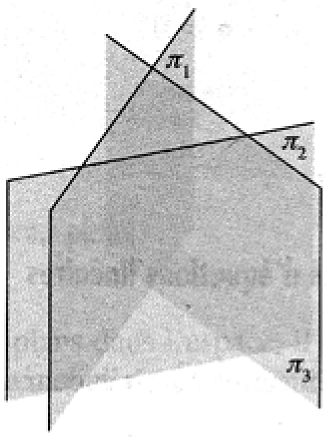
- Le système est simplement indéterminé : les trois plans ont une **droite** commune.



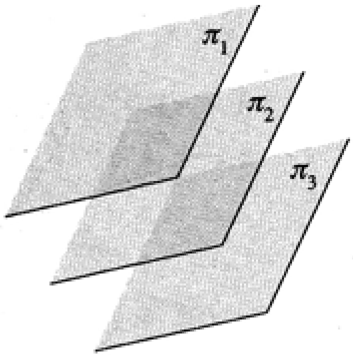
- Le système est doublement indéterminé : les trois plans sont **confondus**.



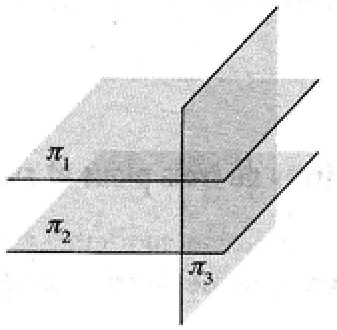
- Le système est impossible : les trois plans n'ont **aucun point commun**.



Les trois plans se coupent deux à deux suivant des droites parallèles.



Les trois plans sont parallèles.



Le troisième plan coupe les deux plans parallèles suivant deux droites parallèles.

Pour résoudre un système de trois équations à trois inconnues, nous allons utiliser la méthode de Gauss qui se base sur le calcul matriciel.

La méthode de Gauss consiste à utiliser des combinaisons linéaires des équations du système pour obtenir des équations plus simples, dans la mesure où le nombre d'inconnues diminue dans des équations des systèmes équivalents.

La matrice d'un système d'équations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

est la matrice obtenue à partir des coefficients et des termes indépendants du système d'équations.

Concrètement, on trace une ligne verticale pour séparer les coefficients a_{ij} des termes indépendants b_i :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} & b_p \end{array}\right)$$

On va progressivement transformer cette matrice en une matrice **échelonnée** grâce aux principes d'équivalence des systèmes.

Une matrice échelonnée d'un système de trois équations à trois inconnues est une matrice de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots \end{array}\right)$$

Exemple : Résolvons le système $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 12 \end{cases}$.

Interprétation géométrique :

Exercices :

Résous les systèmes suivants en utilisant la méthode de Gauss et donne une interprétation géométrique précise[2] des solutions.

(1) $$\begin{cases} x-2y+z-7=0 \\ 2x+y-z+2=0 \\ x-3y+2z-11=0 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} 7x+4y+7z+11=0 \\ 2x-y-z+2=0 \\ x+2y+3z-1=0 \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ 3x+2y-2z=-4 \\ -x-4y+6z=22 \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} 2x-y+z=4 \\ -4x+2y-2z=-8 \\ 2z-2y=8-4x \end{cases}$$

(5) $$\begin{cases} x+y-2z=5 \\ -2x-2y+4z=10 \\ -x-y+2z=5 \end{cases}$$

(6) $$\begin{cases} 3x+y-2z=1 \\ -x+3y+4z=5 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$$

(7) $$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 3x+3y=4 \\ 2x+4y-z=3 \end{cases}$$

[2]Si les trois plans ont un point commun, donne les coordonnées de ce point. Si les 3 plans ont une droite commune, donne une équation cartésienne de cette droite. Si les trois plans n'ont aucun point commun, précise leur position. Si le système est impossible, précise la position des 3 plans.

(8) $\begin{cases} x+y-2z=5 \\ 2x+2y-4z=10 \\ x+7y+2z=3 \end{cases}$

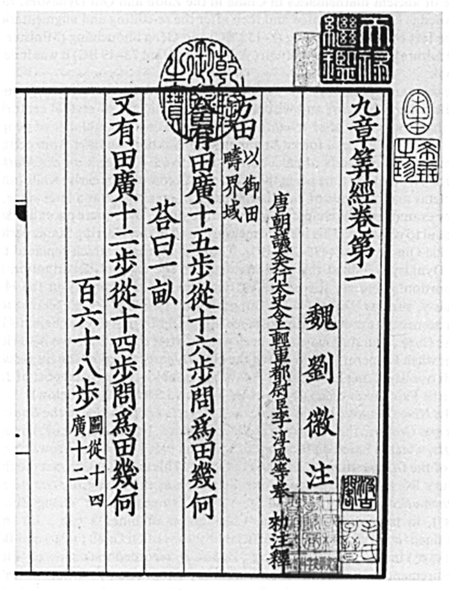
(9) $\begin{cases} 2x+y+3z=2 \\ x+2z=-1 \\ 2x-2z=3 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x-4y-z=1 \\ 2x-5y+2z=2 \\ 6x-18y+2z=6 \end{cases}$

Le saviez-vous ?

Les Neuf chapitres sur l'art mathématique est un livre anonyme chinois de mathématiques contenant des textes écrits entre le IIe siècle avant J.-C. et le Ier siècle avant J.-C.Il propose 246 problèmes et leurs solutions afin d'obtenir une méthode générale de résolution de problèmes. Le 8e chapitre de cet ouvrage s'intitule *Fang chen – La disposition rectangulaire* et propose un principe de résolution de problèmes à plusieurs inconnues.

Sur le même principe que les systèmes de deux équations à deux inconnues, on peut poser et résoudre un système de *n* équations à *n* inconnues.



F. Distance d'un point à un plan ou à une droite

La distance d'un point à un plan (à une droite) est la distance minimale entre ce point et un point du plan (de la droite).

- La distance du point P au plan π est la distance de ce point à sa projection orthogonale sur π. Pour la calculer, il faut :

  ………………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………...

- La distance du point P à la droite d est la distance de ce point à sa projection orthogonale sur d. Pour la calculer, il faut :

  ………………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………...

(4) Exercices

1. Calcule la distance du point $B(-2;-4;3)$ au plan $\alpha \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0$.

2. Calcule la distance du point $A(0;3;2)$ au plan $\pi \equiv z = 0$.

3. Calcule la distance du point $C(2;3;-1)$ à la droite $d \equiv \begin{cases} x = 3k + 5 \\ y = 2k \\ z = -2k - 25 \end{cases}$.

4. Calcule la distance entre les deux droites parallèles $d \equiv \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2 - k \\ z = 3 + 2k \end{cases}$ et $d' \equiv \begin{cases} x = 5 - 9l \\ y = 3l \\ z = -2 - 6l \end{cases}$.

5. Calcule la distance entre les deux plans parallèles $\pi \equiv 2x - y + 4z - 24 = 0$ et $\pi' \equiv 4x - 2y + 8z - 57 = 0$.

6. Calcule la distance entre les droites $d_1 \equiv \begin{cases} x = 2k - 2 \\ y = -4k - 6 \\ z = 3k + 6 \end{cases}$ et $d_2 \equiv \begin{cases} x = -5 \\ y = -l - 6 \\ z = 2 - l \end{cases}$.

G. Exercices divers

1. Détermine une équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$ avec $A(1;-7;3)$ et $B(0;5;-3)$.

2. On considère, pour tout réel *m*, la famille de plans π_m d'équation $\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0$ (où *m* est un paramètre réel).

   (1) Pour quelle(s) valeur(s) de *m* le point $A(1;1;1)$ appartient-il au plan π_m ?

   (2) Montre que les plans π_1 et π_{-4} sont sécants et donne des équations paramétriques de leur droite d'intersection d.

   (3) Montre que l'intersection entre π_0 et d est un point (noté B) dont tu détermineras les coordonnées.

   (4) Justifie que, pour tout réel m, le point B appartient au plan π_m.

3. On considère la droite $d \equiv \begin{cases} 2y+z=3 \\ x-y+2=0 \end{cases}$ ainsi que la famille de plans $\pi_m \equiv mx+2y-z=m$ (où m est un paramètre réel).

   (1) Pour quelle(s) valeur(s) de m le plan π_m est-il parallèle à d ?

   (2) Pour la(les) valeur(s) trouvée(s) en (1), la droite est-elle strictement parallèle au plan π_m ou incluse dans ce plan ?

   (3) On donne le point P de coordonnées $(0;2;3)$. Donne, en fonction de m, la distance de P à π_m.

4. Discute, en fonction du réel a, la position de la droite $d \equiv \begin{cases} x=ak+3 \\ y=2k+2 \\ z=-k+a \end{cases}$ et du plan $\pi \equiv 3x-2y+5z-1=0$.

5. On donne trois points $A(3;0;3)$, $B(3;3;0)$ $C(0;3;3)$. Ces trois points forment un tétraèdre avec l'origine du système d'axes.
   (1) Représente ce tétraèdre.
   (2) Ce tétraèdre est-il régulier ?
   (3) Calcule la distance du point O au plan ABC.

6. Soit un tétraèdre $ABCD$ dont les coordonnées des sommets sont $A(0;4;2)$, $B(3;1;5)$, $C\left(-1;\frac{3}{2};-6\right)$ et $D(6;-2;1)$.
   (1) Détermine une équation cartésienne du plan contenant la base ABC.
   (2) Détermine des équations paramétriques de la hauteur issue de D et perpendiculaire au plan ABC. Et calcule les coordonnées du point de percée dans ce même plan.
   (3) Calcule les coordonnées du point H, projection de C sur AB dans le triangle ABC.