B. Définitions et opérations sur les vecteurs

Toutes les notions vues en 4$^{\text{ème}}$ dans le plan sur les vecteurs se généralisent à l'espace.

Construis un support de cours qui réponde aux objectifs 2 à 11 de la partie *Savoir* et aux objectifs 3 à 8 de la partie *Être capable de*.

1. Définitions

VECTEURS DANS L'ESPACE : DEFINITIONS

https://youtu.be/-Km8YD8HO88

2. Egalité de deux vecteurs

EGALITE DE DEUX VECTEURS DANS L'ESPACE

https://youtu.be/38qTYyQK0HA

3. Parallélisme de deux vecteurs

PARALLELISME DE DEUX VECTEURS DANS L'ESPACE

https://youtu.be/Dcel0DM6-Y4

4. Addition de vecteurs

ADDITION DE VECTEURS DANS L'ESPACE

https://youtu.be/4N9VsP2n4mo

5. Multiplication d'un vecteur par un réel

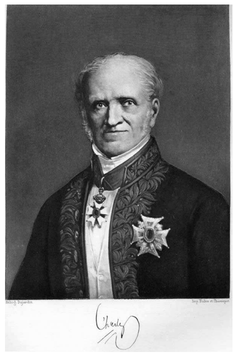
MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN REEL L'ESPACE

https://youtu.be/yKPTQZ33fAY

Le saviez-vous ?

Michel Chasles (1793-1880) n'est pas à l'origine de la relation qui porte son nom, qui lui est bien antérieure. Mais ses travaux ont contribué à la rendre célèbre.

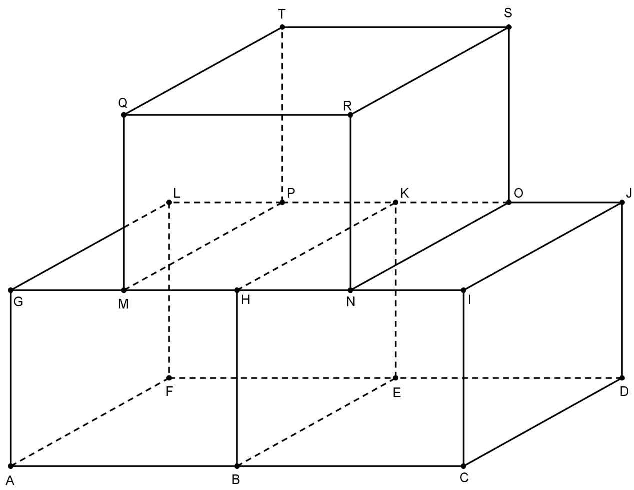
C'est en revanche lui qui donna leur nom aux homothéties, transformations du plan ou de l'espace, fortement liées à la notion d'angle.



6. Exercices

https://bit.ly/36n7wBm

1. A partir du dessin, détermine deux vecteurs égaux à chacun des vecteurs suivants :
   a. $\overrightarrow{TR}$
   b. $\overrightarrow{OQ}$
   c. $\overrightarrow{AM}$
   d. $\overrightarrow{HE}$



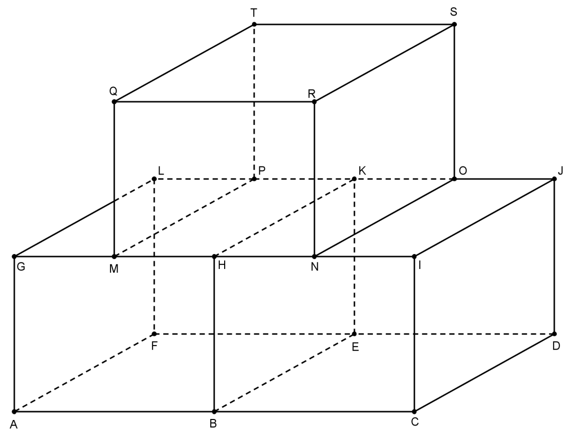
2. Détermine le réel a pour que les vecteurs $\vec{u}$ de composantes $(2-a;1;2a+3)$ et $\vec{v}$ de composantes $(a+4;a+2;a+2)$ soient égaux.

   Donne les composantes de $\vec{u}$.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils parallèles si $A(1;3;-2)$, $B(7;5;0)$, $C(2;-2;3)$ et $D(5;-1;4)$?

4. Vérifie si les points *M*, *N* et *P* sont alignés :
   (1) $M(3;-2;-4), N(1;3;-2)$ et $P(-3;13;2)$
   (2) $M(5;2;-4), N(-1;0;2)$ et $P(-11;-4;12)$

5. A partir du dessin suivant :
   a. Réponds par vrai ou faux :



(1) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{EJ}$

(2) $\overrightarrow{TR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LT}$

(3) $\overrightarrow{KL} = -\overrightarrow{BL}$

(4) $\overrightarrow{SN} + \overrightarrow{MT} = \overrightarrow{BB}$

(5) $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$

(6) $2\overrightarrow{LM} + 2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{TS}$

b. Détermine un représentant des sommes suivantes, sans ajouter de point :

(1) $\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{DI} =$

(2) $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{CE} =$

(3) $\overrightarrow{TN} + \overrightarrow{FL} =$

(4) $\frac{1}{2}\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{NQ} =$

(5) $\overrightarrow{KE} - \overrightarrow{HN} =$

(6) $\overrightarrow{FB} - \overrightarrow{OS} =$

(7) $\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AE} =$

(8) $\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{KI} - \overrightarrow{EJ} =$

(9) $\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{PN} =$

6. On donne, dans un repère orthonormé de l'espace, les points suivants et leurs coordonnées : $A(3;-2;4)$, $B(-4;0;-2)$, $C(3;-1;2)$ et $D(-3;4;1)$.

   (1) Calcule les composantes des vecteurs suivants :

      a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

      b. $-\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}$

      c. $\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

   (2) Calcule la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

7. A l'aide du cube dessiné, à quel vecteur égales-tu chaque somme ou différence suivante ?

   (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DG}=$

   (2) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GH}=$

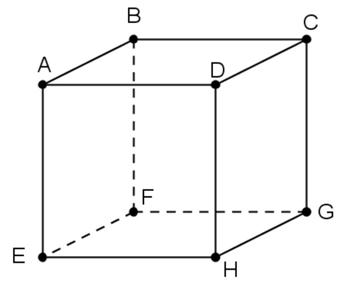
   (3) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}=$

   (4) $\overrightarrow{EH}-\overrightarrow{FG}=$

   (5) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{FE}=$

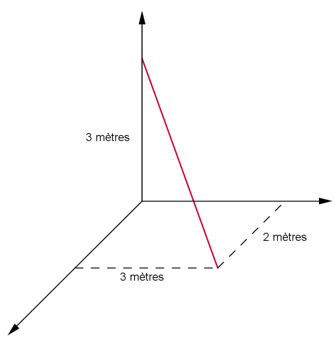
   (6) $\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EF}=$

   (7) $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=$



8. On donne, dans un repère de l'espace, les points suivants et leurs coordonnées : $A(3;-2;-4)$, $B(1;3;-2)$, $C(2;4;4)$ et $D(4;-1;2)$. Démontre que le quadrilatère *ABCD* est un parallélogramme.

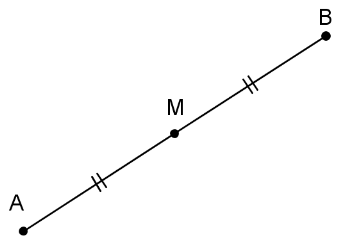
9. Une poutre repose sur le sol et à l'angle des murs d'un local. Utilise les données de la figure pour déterminer la longueur de la poutre.



C. Applications du calcul vectoriel

1. Milieu d'un segment

M est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$



Propriétés :

(1) M est le milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

(2) M est le milieu de $[AB] \Leftrightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2};\frac{y_A + y_B}{2};\frac{z_A + z_B}{2}\right)$

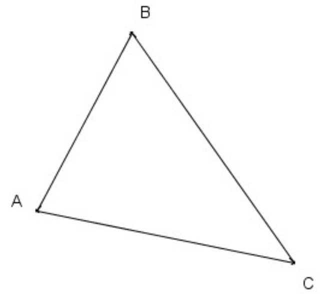
Exercice : Calcule les composantes de $\overrightarrow{MP}$ lorsque l'on te dit que

M est le milieu de $[AB]$,
P est le milieu de $[CD]$,
l'on connaît les coordonnées des extrémités
de ces segments : $A(-2;1;3)$, $B(0;1;-2)$,
$C(-3;0;2)$ et $D(4;-4;5)$.

2. Centre de gravité d'un triangle

Le point d'intersection des médianes[1] d'un triangle est le **centre de gravité** de ce triangle. On le note généralement avec la lettre G. Il se situe aux deux tiers de la longueur de chaque médiane, à partir de leur sommet.

Construis le centre de gravité de ce triangle.



Propriété : G est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

Exercices :

1. Calcule les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC si $A(-1;2;3)$, $B(3;-4;5)$ et $C(2;1;-1)$.

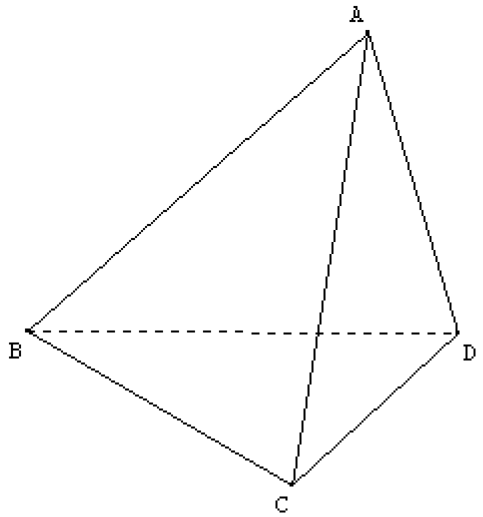
2. On donne $A(-2;3;-2)$, $B(-6;-1;1)$ et $G(-3;1;1)$, le centre du gravité du triangle ABC. Détermine les coordonnées du sommet C du triangle.

[1] Dans un triangle, une médiane issue d'un sommet est une droite passant par ce sommet et le milieu du côté opposé.

3. Centre de gravité d'un tétraèdre

La médiane d'un tétraèdre est une droite joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée. Le point d'intersection des quatre médianes d'un tétraèdre est son centre de gravité.

Traçons une médiane du tétraèdre ci-dessous :



Propriété : G est le centre de gravité du tétraèdre $ABCD$ si et seulement si $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$.

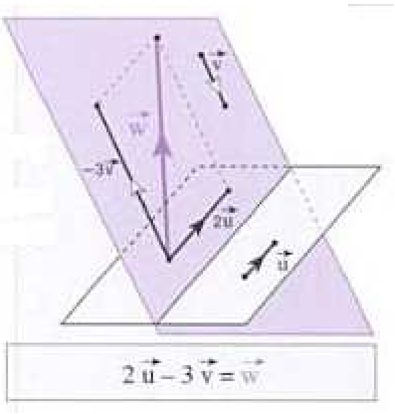
Exercice : Détermine les coordonnées du centre de gravité du tétraèdre $ABCD$ si $A(0;11;7)$, $B(20;10;0)$, $C(15;23;16)$ et $D(15;2;19)$.

4. Combinaison linéaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Le vecteur $\vec{w} = k\vec{u} + l\vec{v}$, où k et l sont des réels, est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemple :



Propriétés :

(1) Si A, B, C sont des points non alignés de l'espace et si $\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, alors D appartient au plan ABC.

(2) Si A, B, C sont des points non alignés de l'espace et si D appartient au plan ABC, alors $\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

(3) Une condition nécessaire et suffisante pour que le point D appartienne au plan ABC est que $\overrightarrow{AD}$ soit une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Pour t'aider à mieux comprendre cette notion, je te propose ce lien vidéo. Attention, en 2 dimensions !

COMBINAISON LINEAIRE DE VECTEURS

Clique sur le clap !

Exercices :

1. Soit $\vec{u}(1;2;3)$, $\vec{v}(2;-1;3)$ et $\vec{w}(9;-17;6)$. Ecris $\vec{w}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Pour quelle valeur du réel λ le vecteur $\vec{t}(2-\lambda;1;\lambda)$ est-il combinaison linéaire de $\vec{u}(1;2;3)$ et $\vec{w}\left(-1;1;-\dfrac{6}{5}\right)$?

3. Les points $A(1;-1;2)$, $B(0;1;3)$, $C(2;-3;4)$ et $D(-1;0;-1)$ appartiennent-ils au même plan ?

2^e partie : Le produit scalaire

Objectifs : Géométrie vectorielle du plan et de l'espace **$5^{ème}$ 6h**

2^e partie : Le produit scalaire

L'élève doit SAVOIR :

1. Définir "angle de vecteurs".
2. Définir "projection orthogonale".
3. Donner la formule trigonométrique du produit scalaire.
4. Enoncer la condition pour que deux vecteurs soient orthogonaux.
5. Compléter les propriétés opératoires du produit scalaire.
6. Expliquer comment calculer le produit scalaire de deux vecteurs parallèles à l'aide d'un schéma.
7. Démontrer la propriété du produit scalaire calculé par une projection orthogonale.
8. Donner la formule pour calculer un produit scalaire de vecteurs dont on connaît les composantes et démontrer cette formule.
9. Démontrer le théorème d'Al-Kashi.

L'élève doit ETRE CAPABLE DE :

1. Représenter et déterminer un angle des vecteurs.
2. Déterminer la projection orthogonale d'un vecteur sur une droite.
3. Déterminer si une expression désigne un réel ou un vecteur.
4. Calculer un produit scalaire, par la méthode la plus adéquate.
5. Déterminer un angle des vecteurs par calculs.
6. Utiliser la notion d'orthogonalité pour résoudre des exercices.
7. Utiliser le théorème d'Al-Kashi.
8. Utiliser des vecteurs en physique.

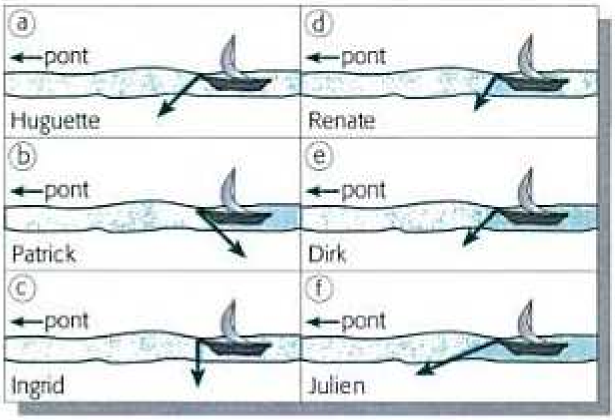
Alors que la somme de deux vecteurs est un vecteur et que le produit d'un vecteur par un réel est aussi un vecteur, le produit scalaire de deux vecteurs est un réel.

Ce concept de produit scalaire, apparu au XIX^{e} siècle, est né de la physique pour calculer le travail d'une force qui déplace son point d'application. Le mot « scalaire » fut donné par Hamilton (1853) ; il signifie ici « numérique » et vient du latin *scalaris* ("escalier, échelle"). Dans un contexte vectoriel, ce qualificatif permet de distinguer les « objets vecteurs » des « objets nombres ».

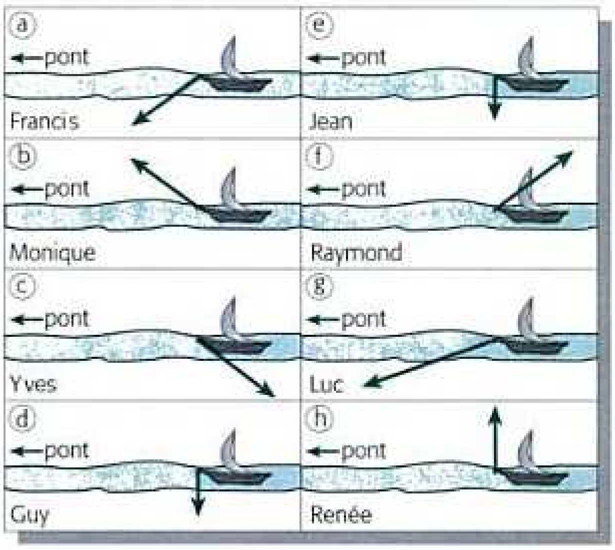
William Hamilton
(04/08/1805 – 02/09/1865)

A. Pour découvrir

1. Renate, Patrick, Julien, Huguette, Dirk et Ingrid ont construit une barque qu'ils ont mise à l'eau sur la rivière qui coule dans leur village. A cette barque est attachée une corde. Ils voudraient tirer la barque jusqu'au pont, en marchant sur la berge. Chacun a son idée. Les flèches ci-dessous représentent la direction dans laquelle chacun compte tirer sur le bateau et la longueur des flèches représente l'intensité de la force avec laquelle ils comptent tirer. Détermine qui amènera le plus rapidement la barque à son but. Explique ton raisonnement.



2. Francis, Monique, Jean, Raymond, Yves, Guy, Luc et Renée se trouvent dans la même situation. Quels sont ceux qui feront progresser le bateau dans le même sens et avec la même vitesse ?



3. A la lumière des conclusions que tu as tirées lors des deux activités précédentes, détermine les éléments qui influencent l'avancée du bateau.

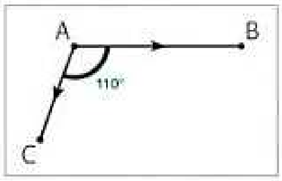
B. Angle de vecteurs et projection

Définition : Dans un plan ou l'espace, on appelle **angle des vecteurs** non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, l'angle $B\hat{A}C$.

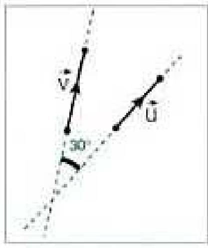
Dans un plan ou l'espace, on appelle **angle des vecteurs** non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, l'angle déterminé par les représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ramenés à la même origine.

Exemples :

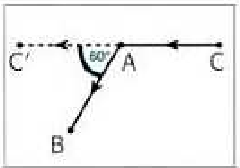
(1) L'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ a une amplitude de 110°.



(2) L'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ a une amplitude de 30°.



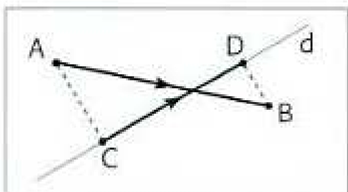
(3) L'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$ est égal à l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ tel que $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CA}$.



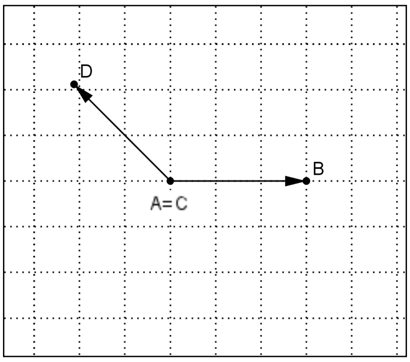
Définition : Dans un plan ou l'espace, le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est la **projection orthogonale** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur la droite *d* si

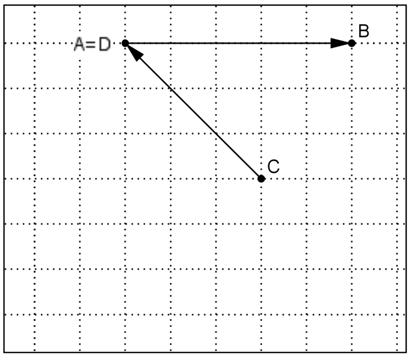
- *C* est la projection orthogonale de *A* sur *d* ;
- *D* est la projection orthogonale de *B* sur *d*.

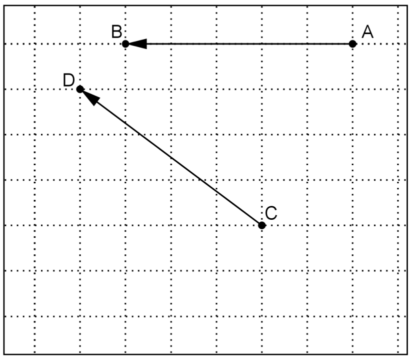
Exemple : $\overrightarrow{CD}$ est la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur la droite *d*.

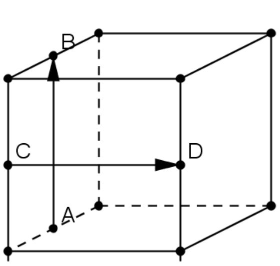


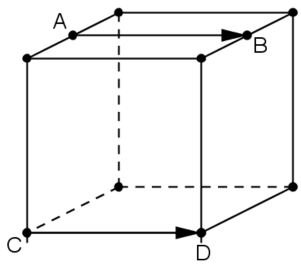
Exercice : Construis et mesure l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

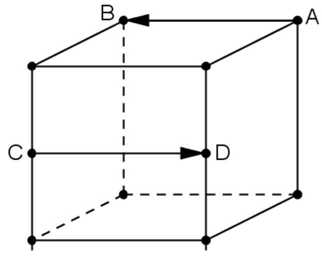












Exercice : Projette orthogonalement $\overrightarrow{AB}$ sur la droite *d*.