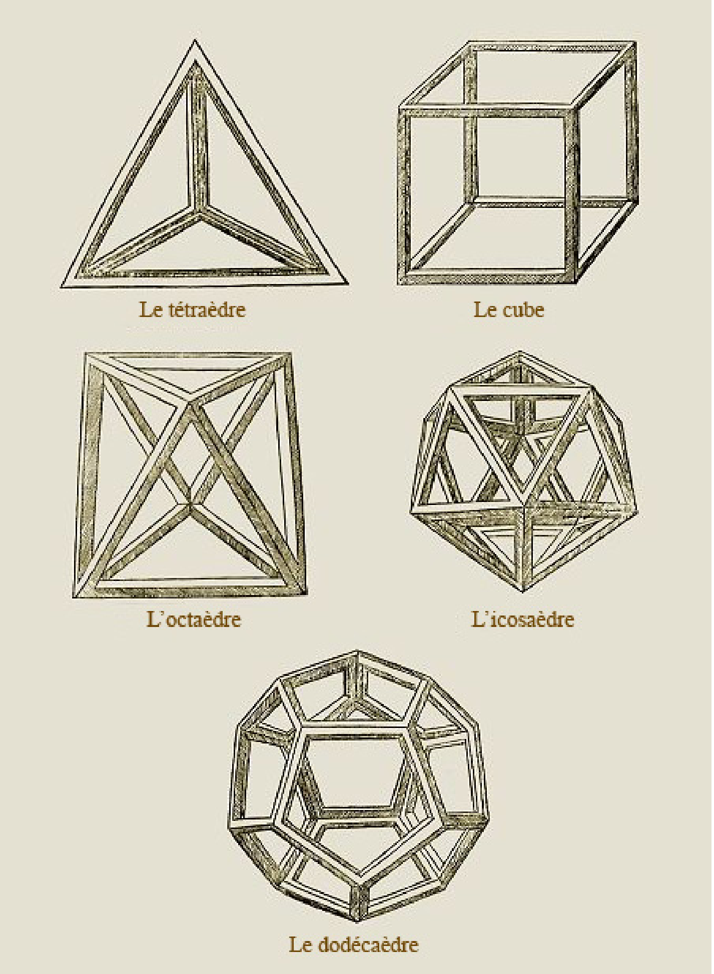
UAA 6 :

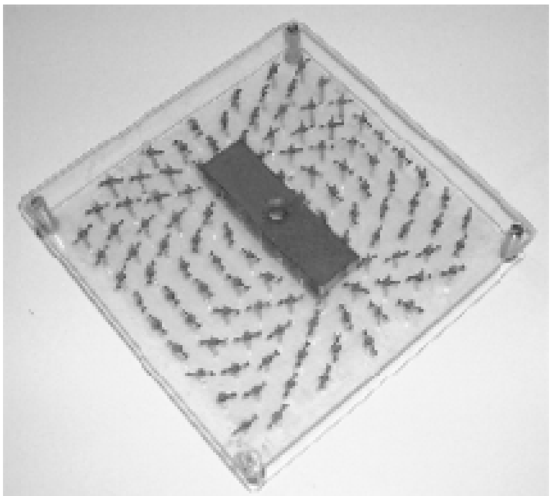
Géométrie vectorielle plane et de l’espace



LES CINQ CORPS PLATONICIENS (POLYÈDRES RÉGULIERS)
Dessins de Léonard de Vinci pour *La Divine proportion* de Luca Pacioli

Pour définir la position d'un point dans un plan muni d'un repère, on utilise **deux** coordonnées : l'abscisse et l'ordonnée.

Mais le monde dans lequel nous vivons est à trois dimensions…



En présence d'un champ magnétique, des petites boussoles s'orientent, indiquant la direction et le sens des vecteurs du champ.

(Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Vecteur)

$1^{ère}$ partie : Le calcul vectoriel

Objectifs : Géométrie vectorielle du plan et de l'espace **$5^{ème}$ 6h**

$1^{ère}$ partie : Le calcul vectoriel

L'élève doit SAVOIR :

1. Définir "repère orthonormé de l'espace".
2. Donner les 3 caractéristiques d'un vecteur non nul (être complet).
3. Expliquer ce qu'est le vecteur nul et donner ses caractéristiques.
4. Donner la formule pour calculer les composantes d'un vecteur.
5. Donner la formule pour calculer la norme d'un vecteur.
6. Enoncer les conditions pour que deux vecteurs soient égaux, d'un point de vue géométrique et analytique.
7. Enoncer les conditions pour que deux vecteurs soient parallèles, d'un point de vue géométrique et analytique.
8. Expliquer, à l'aide d'un schéma, comment additionner deux vecteurs consécutifs ou non.
9. Donner les caractéristiques du vecteur $k.\overrightarrow{AB}$.
10. Donner la règle du parallélogramme.
11. Expliquer ce qu'est l'opposé d'un vecteur.
12. Donner la relation vectorielle caractérisant le milieu d'un segment.
13. Donner la relation vectorielle caractérisant le centre de gravité d'un triangle ou d'un tétraèdre.
14. Définir "combinaison linéaire".
15. Expliquer ce qu'est une médiane.
16. Expliquer ce qu'est le centre de gravité d'un triangle.
17. Expliquer ce qu'est le centre de gravité d'un tétraèdre.

***L'élève doit** ETRE CAPABLE DE :*

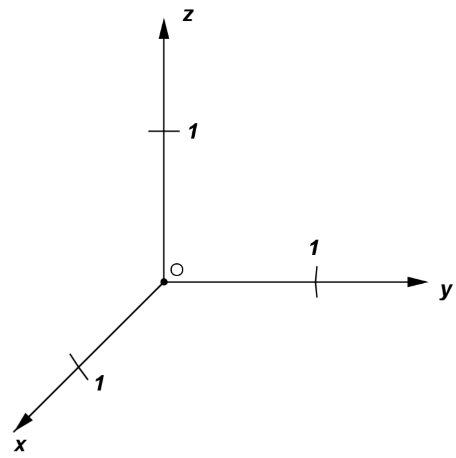
1. Représenter un point dans l'espace.
2. Déterminer les coordonnées d'un point de l'espace.
3. Calculer les composantes d'un vecteur.
4. Calculer la norme d'un vecteur.
5. Utiliser la notion de vecteurs égaux/parallèles pour résoudre des exercices.
6. Construire une somme de vecteurs.
7. Donner un représentant de la somme (différence et multiplication par un réel) de vecteurs.
8. Utiliser la règle du parallélogramme.
9. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment avec les vecteurs.
10. Calculer les coordonnées du centre de gravité d'un triangle ou d'un tétraèdre.
11. Utiliser la notion de combinaison linéaire.

A. Repère de l'espace

Un **repère orthonormé de l'espace** est constitué de 3 axes perpendiculaires deux à deux, de même origine O et gradués avec la même unité.

On convient que :

- le premier axe, noté x, est l'**axe des abscisses** du repère ;
- le deuxième axe, noté y, est l'**axe des ordonnées** du repère ;
- le troisième axe, noté z, est l'**axe des cotes** du repère.

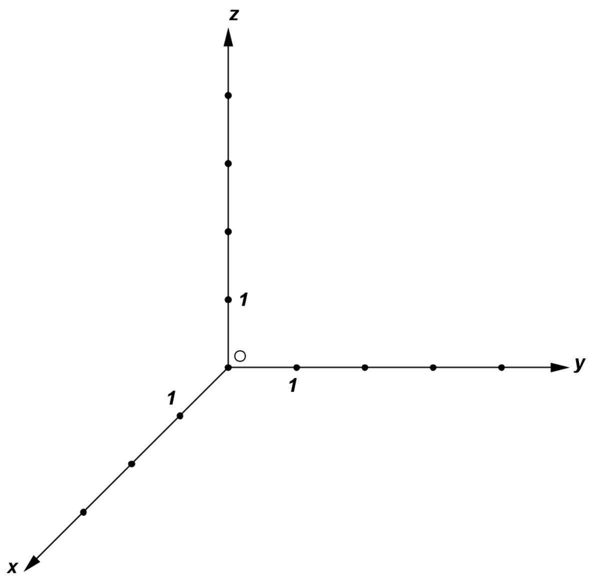


On convient également que :

- le plan xOy est le **plan horizontal** ;
- le plan xOz est le **plan de profil** ;
- le plan yOz est le **plan vertical**.

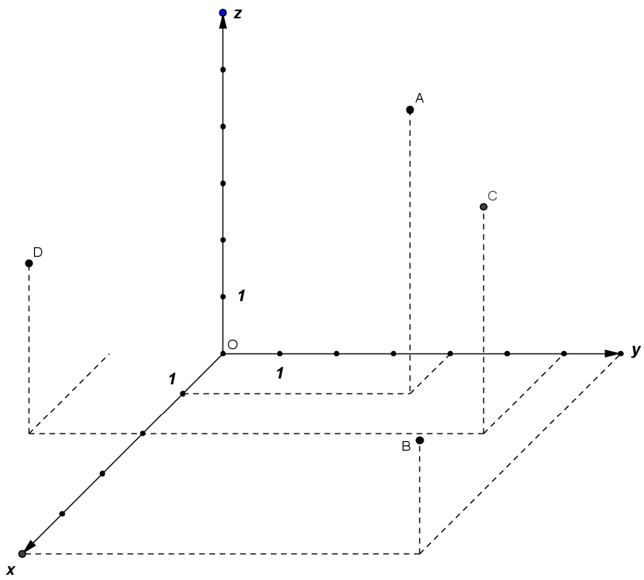
Les **coordonnées d'un point** A de l'espace, dans un repère $Oxyz$ donné, forment le triplet de réels $(x_A; y_A; z_A)$ qui fixe la position du point dans ce repère.

Exemple : Représentons le point $A(3;1;4)$.

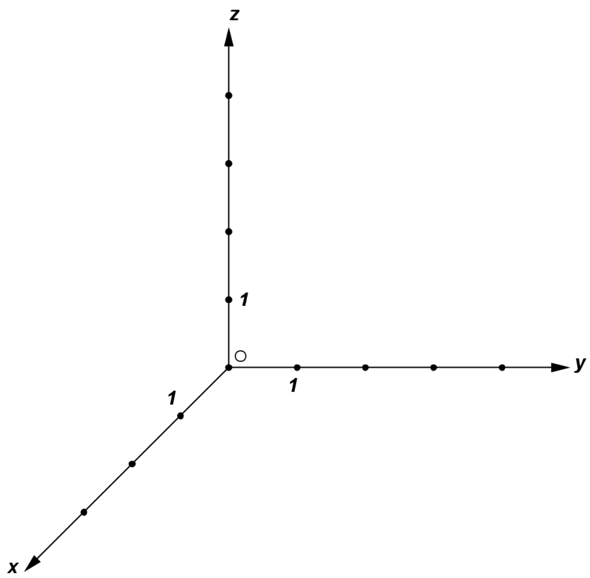


Exercices :

1. Détermine les coordonnées des points représentés ci-dessous :



2. Place les points $A(3;1;2)$, $B(1;-1;2)$ et $C(0;5;2)$ dans le repère.



B. Définitions et opérations sur les vecteurs

Toutes les notions vues en 4ème dans le plan sur les vecteurs se généralisent à l'espace.

Construis un support de cours qui réponde aux objectifs 2 à 11 de la partie *Savoir* et aux objectifs 3 à 8 de la partie *Être capable de*.

1. Définitions

Vecteurs dans l'espace : Definitions

https://youtu.be/-Km8YD8HO88

2. Egalité de deux vecteurs

Egalite de deux vecteurs dans l'espace

https://youtu.be/38qTYyQK0HA

3. Parallélisme de deux vecteurs

Parallelisme de deux vecteurs dans l'espace

https://youtu.be/Dcel0DM6-Y4

4. Addition de vecteurs

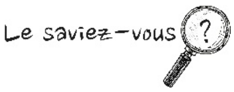
Addition de vecteurs dans l'espace

https://youtu.be/4N9VsP2n4mo

5. Multiplication d'un vecteur par un réel

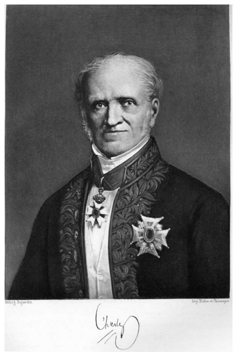
MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN REEL L'ESPACE

https://youtu.be/yKPTQZ33fAY



Michel Chasles (1793-1880) n'est pas à l'origine de la relation qui porte son nom, qui lui est bien antérieure. Mais ses travaux ont contribué à la rendre célèbre.

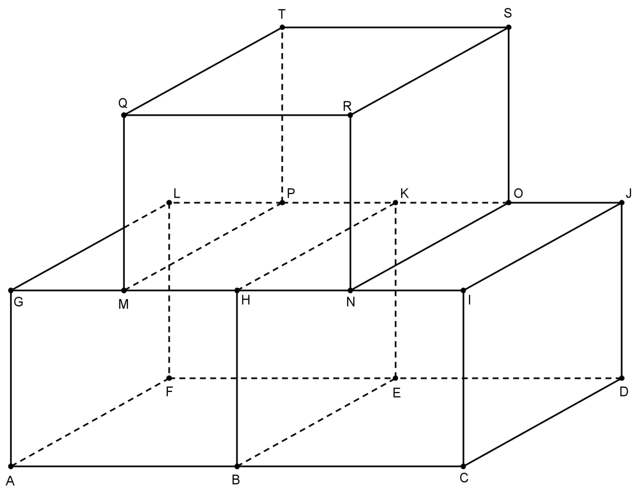
C'est en revanche lui qui donna leur nom aux homothéties, transformations du plan ou de l'espace, fortement liées à la notion d'angle.



6. Exercices

https://bit.ly/36n7wBm

1. A partir du dessin, détermine deux vecteurs égaux à chacun des vecteurs suivants :
   a. $\overrightarrow{TR}$
   b. $\overrightarrow{OQ}$
   c. $\overrightarrow{AM}$
   d. $\overrightarrow{HE}$



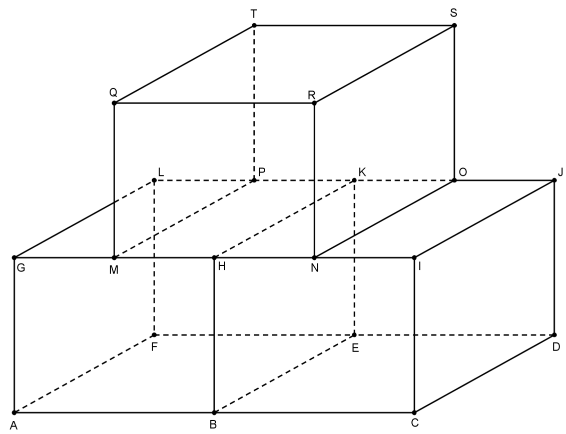
2. Détermine le réel a pour que les vecteurs $\vec{u}$ de composantes $(2-a;1;2a+3)$ et $\vec{v}$ de composantes $(a+4;a+2;a+2)$ soient égaux.

   Donne les composantes de $\vec{u}$.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils parallèles si $A(1;3;-2)$, $B(7;5;0)$, $C(2;-2;3)$ et $D(5;-1;4)$?

4. Vérifie si les points M, N et P sont alignés :
   (1) $M(3;-2;-4), N(1;3;-2)$ et $P(-3;13;2)$
   (2) $M(5;2;-4), N(-1;0;2)$ et $P(-11;-4;12)$

5. A partir du dessin suivant :



   a. Réponds par vrai ou faux :
      (1) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{EJ}$
      (2) $\overrightarrow{TR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LT}$
      (3) $\overrightarrow{KL} = -\overrightarrow{BL}$
      (4) $\overrightarrow{SN} + \overrightarrow{MT} = \overrightarrow{BB}$
      (5) $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$
      (6) $2\overrightarrow{LM} + 2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{TS}$

   b. Détermine un représentant des sommes suivantes, sans ajouter de point :
      (1) $\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{DI} =$
      (2) $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{CE} =$
      (3) $\overrightarrow{TN} + \overrightarrow{FL} =$
      (4) $\frac{1}{2}\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{NQ} =$
      (5) $\overrightarrow{KE} - \overrightarrow{HN} =$
      (6) $\overrightarrow{FB} - \overrightarrow{OS} =$
      (7) $\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AE} =$
      (8) $\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{KI} - \overrightarrow{EJ} =$
      (9) $\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{PN} =$

6. On donne, dans un repère orthonormé de l'espace, les points suivants et leurs coordonnées : $A(3;-2;4)$, $B(-4;0;-2)$, $C(3;-1;2)$ et $D(-3;4;1)$.

   (1) Calcule les composantes des vecteurs suivants :

   a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

   b. $-\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}$

   c. $\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

   (2) Calcule la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

7. A l'aide du cube dessiné, à quel vecteur égales-tu chaque somme ou différence suivante ?

   (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DG}=$

   (2) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GH}=$

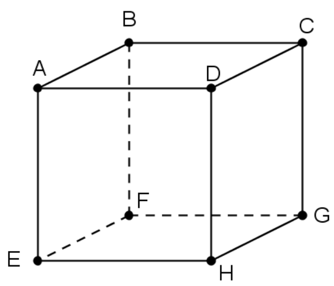
   (3) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}=$

   (4) $\overrightarrow{EH}-\overrightarrow{FG}=$

   (5) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{FE}=$

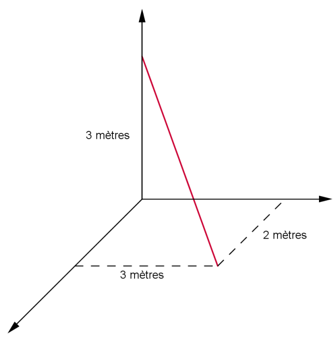
   (6) $\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EF}=$

   (7) $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=$



8. On donne, dans un repère de l'espace, les points suivants et leurs coordonnées : $A(3;-2;-4)$, $B(1;3;-2)$, $C(2;4;4)$ et $D(4;-1;2)$. Démontre que le quadrilatère *ABCD* est un parallélogramme.

9. Une poutre repose sur le sol et à l'angle des murs d'un local. Utilise les données de la figure pour déterminer la longueur de la poutre.



C. Applications du calcul vectoriel

Pour chaque section de cette partie du cours, construis un support de cours et réalise les exercices. Ce support te permettra de répondre aux objectifs 12 à 14 de la partie *Savoir* et aux objectifs 9 à 11 de la partie *Être capable de*.

1. Milieu d'un segment

MILIEU D'UN SEGMENT

https://youtu.be/n4DzYamNA38

Exercice : Calcule les composantes de $\overrightarrow{MP}$ si tu sais que :

- M est le milieu de $[AB]$,
- P est le milieu de $[CD]$,
- les coordonnées des extrémités de ces segments sont :

  $A(-2;1;3), B(0;1;-2), C(-3;0;2)$ et $D(4;-4;5)$.

https://bit.ly/3vpqzn6

2. Centre de gravité d'un triangle

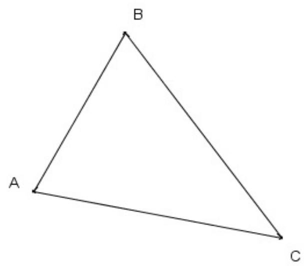
CENTRE DE GRAVITE D'UN TRIANGLE

https://youtu.be/FGG555dqBug

Exercices :

https://bit.ly/3rwIc30

1. Construis le centre de gravité de ce triangle :



2. Calcule les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC si $A(-1;2;3)$, $B(3;-4;5)$ et $C(2;1;-1)$.

3. On donne $A(-2;3;-2)$, $B(-6;-1;1)$ et $G(-3;1;1)$, le centre du gravité du triangle ABC. Détermine les coordonnées du sommet C du triangle.

3. Centre de gravité d'un tétraèdre

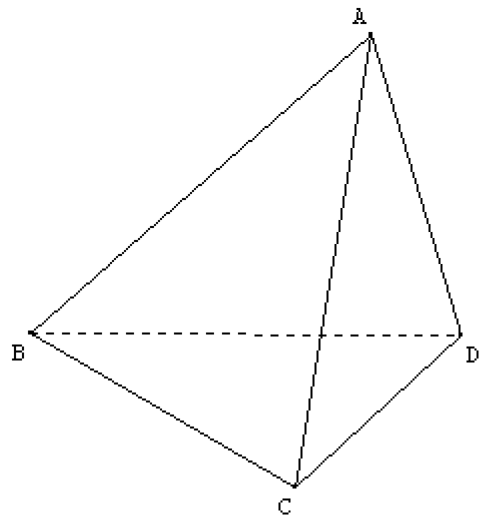
CENTRE DE GRAVITE D'UN TETRAEDRE

https://youtu.be/nOb5ez09ALI

Exercices :

https://bit.ly/3ElOWpH

1. Trace une médiane du tétraèdre ci-dessous :



2. Détermine les coordonnées du centre de gravité du tétraèdre $ABCD$ si $A(0;11;7)$, $B(20;10;0)$, $C(15;23;16)$ et $D(15;2;19)$.

4. Combinaison linéaire

COMBINAISON LINEAIRE DE VECTEURS

https://youtu.be/Yc2G2NkvyX8

Exercices :

https://bit.ly/3KRSgvi

1. Soit $\vec{u}(1;2;3)$, $\vec{v}(2;-1;3)$ et $\vec{w}(9;-17;6)$. Ecris $\vec{w}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Pour quelle valeur du réel λ le vecteur $\vec{t}(2-\lambda;1;\lambda)$ est-il combinaison linéaire de $\vec{u}(1;2;3)$ et $\vec{w}\left(-1;1;-\frac{6}{5}\right)$?

3. Les points $A(1;-1;2)$, $B(0;1;3)$, $C(2;-3;4)$ et $D(-1;0;-1)$ appartiennent-ils au même plan ?