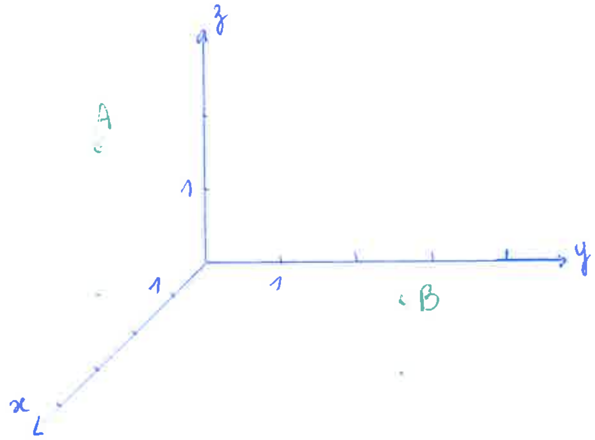
GÉOMÉTRIE VECTORIELLE PLANE ET DE L'ESPACE

C. SCOLAS

https://bit.ly/44BOjYr

1. On donne les points $A(1;-1;2)$ et $B(3;4;1)$.

   (1) Utilise une feuille quadrillée pour représenter ces points dans un repère orthonormé de l'espace.



   (2) Calcule les coordonnées de C, milieu du segment $[AB]$.

   $C = \left(\frac{1+3}{2} ; \frac{-1+4}{2} ; \frac{2+1}{2}\right) = \left(2 ; \frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right)$

2. Détermine, si possible, les valeurs des réels a et b tels que :

   (1) les vecteurs $\vec{u}(2-a;1;2a+3)$ et $\vec{v}(a+4;a+2;a+2)$ soient égaux

   $\begin{cases} 2-a=a+4 \\ 1=a+2 \\ 2a+3=a+2 \end{cases} \longrightarrow a=-1$

   Il faut vérifier que cette valeur convient aux 2 autres équations.

   $2-(-1) \overset{?}{=} -1+4$ et $2.(-1)+3 \overset{?}{=} -1+2$

   $3 = 3$ $\qquad 1 = 1$

   $\Rightarrow a=-1$

   (2) les vecteurs $\vec{u}(a+2;2a-b;b+3)$ et $\vec{v}(b+3;3;a+2)$ soient égaux

   $\begin{cases} a+2=b+3 \\ 2a-b=3 \\ b+3=a+2 \end{cases}$

   Comme la 1e et la 3e équation sont identiques, on résout le système avec les 2 premières :

   $\begin{cases} a+2=b+3 \\ 2a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a-1 \\ b=2a-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a-1=2a-3 \\ 2=a \end{array}$

   $\rightarrow b=a-1=1$

(3) les vecteurs $\vec{u}(a+1;2a-4;4)$ et $\vec{v}(5-a;6-a;2)$ soient parallèles

$$\begin{cases} a+1=k.(5-a) \\ 2a-4=k.(6-a) \\ 4=k.2 \longrightarrow k=2 \end{cases}$$

On remplace dans les 2 premières équations :

$$\begin{cases} a+1=2.(5-a) \\ 2a-4=2.(6-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=10-2a \\ 2a-4=12-2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a=9 \\ 4a=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=4 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ On ne peut pas trouver de valeur pour a.

(4) les vecteurs $\vec{u}(2a-1;4-3a;7-a)$ et $\vec{v}(3+a;5-2a;a)$ soient parallèles

$$\begin{cases} 2a-1=k.(3+a) \\ 4-3a=k.(5-2a) \\ 7-a=k.a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{2a-1}{3+a} \\ k=\frac{4-3a}{5-2a} \\ k=\frac{7-a}{a} \end{cases} \Rightarrow \frac{2a-1}{3+a}=\frac{7-a}{a}$$

$$\Leftrightarrow (2a-1).a=(7-a).(3+a)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2-a=21+7a-3a-a^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2-5a-21=0$$

$$\Delta=(-5)^2-4.3.(-21)=277$$

$$a_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{277}}{6} \begin{cases} 3{,}61 \\ -1{,}94 \end{cases}$$

Si on remplace a par 3,61 puis par $-1{,}94$ dans les 3 équations, on trouve des valeurs $\neq$ pour k $\Rightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont par//.

3. Soit $A(-5;1;4), B(2;3;-6)$ et $C(0;1;7)$.

(1) Détermine les coordonnées du point D telles que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$ABCD$ est un parallélogramme ssi $\vec{AB}=\vec{DC}$.

$$\vec{AB}=(7;2;-10)$$
$$\vec{DC}=(-x_D;1-y_D;7-z_D) \Rightarrow \begin{cases} 7=-x_D \\ 2=1-y_D \\ -10=7-z_D \end{cases} \Rightarrow D(-7;-1;17)$$

(2) Détermine les coordonnées du point E telles que $AECB$ soit un parallélogramme.

$AECB$ est un parallélogramme ssi $\vec{AE}=\vec{BC}$.

$$\vec{AE}=(x_E+5;y_E-1;z_E-4)$$
$$\vec{BC}=(-2;-2;13) \Rightarrow \begin{cases} x_E+5=-2 \\ y_E-1=-2 \\ z_E-4=13 \end{cases} \Rightarrow E(-7;-1;17)$$

4. Soit $A(3;-2;4)$, $B(-4;0;-2)$, $C(3;-1;2)$ et $D(-3;5;-1)$. Calcule les composantes et la norme des vecteurs suivants :

(1) $\vec{u}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{3}(6;-6;3) = (-2;2;-1)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2} = 3$

(2) $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = (-7;2;-6)+(-6;6;-3) = (-13;8;-9)$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-13)^2+8^2+(-9)^2} = \sqrt{314}$

(3) $\vec{w}=-\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD} = -(0;1;-2)+2.(-6;7;-5)$

$= (0;-1;2)+(-12;14;-10)$

$= (-12;13;-8)$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{(-12)^2+13^2+(-8)^2} = \sqrt{377}$

5. Les points $A(1;2;3)$, $B(2;-1;4)$ et $C(3;-4;5)$ sont-ils alignés ? Justifie ta réponse.

A, B et C sont alignés si $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = (1;-3;1)$

$\overrightarrow{AC} = (2;-6;2)$

Comme $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, les points A, B et C sont alignés.

6. Le vecteur $\vec{w}$ peut-il s'écrire comme la combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si $\vec{w}(0;3;4)$, $\vec{u}(1;2;3)$, $\vec{v}(-1;1;1)$? Justifie ta réponse.

$\vec{w} \stackrel{?}{=} k.\vec{u}+l.\vec{v}$

$$\begin{cases} 0 = k - l & \longrightarrow k = l \\ 3 = 2k+l & \longrightarrow 3 = 3l,\ l = 1 \\ 4 = 3k+l & \end{cases}$$

$\hookrightarrow 4 = 4l$
$l = 1$

$\vec{w}$ peut s'écrire comme la combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{w} = k+l$.

7. Les points $K(2;1;0)$, $L(1;-2;-1)$, $M(0;1;-2)$ et $P(2;-5;4)$ sont-ils coplanaires ? Justifie ta réponse.

$\vec{KL} \stackrel{?}{=} k.\vec{KM}+l.\vec{KP}$

$$\begin{cases} -1 = -2k & \longrightarrow k = \frac{1}{2} \\ -3 = -6l & \longrightarrow l = \frac{1}{2} \\ -1 = -2k+4l & \end{cases}$$

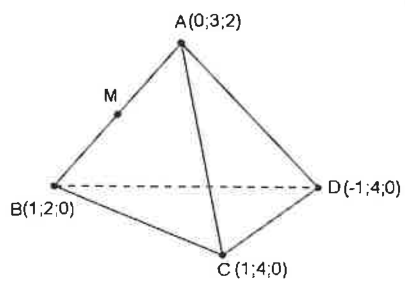
$\hookrightarrow$ On vérifie dans la 3e équation.

$-1 \stackrel{?}{=} -2.\frac{1}{2}+4.\frac{1}{2}$

$-1 \stackrel{?}{=} -1+2$

$-1 \neq 1$ $\Rightarrow$ Les points ne sont pas coplanaires

8. Dans le tétraèdre ci-contre, M est le milieu de $[AB]$.



(1) Calcule les coordonnées de M.

$M = \left(\frac{0+1}{2}; \frac{3+2}{2}; \frac{2+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; 1\right)$

(2) Calcule la longueur de l'arête $[AC]$.

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(1-0)^2+(4-3)^2+(0-2)^2}$

$= \sqrt{1+1+4}$

$= \sqrt{6}$

(3) Calcule les coordonnées du point R tel que $BACR$ soit un parallélogramme.

$\vec{BA} = \vec{RC} \Leftrightarrow (-1; 1; 2) = (1 - x_R ; 4 - y_R ; -z_R)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 1 - x_R \\ 1 = 4 - y_R \\ 2 = -z_R \end{cases}$ $R(2; 3; -2)$

(4) Calcule les coordonnées du centre de gravité G du triangle BCD.

$\vec{BG} + \vec{CG} + \vec{DG} = \vec{0} \Leftrightarrow (x_G - 1; y_G - 2; z_G) + (x_G - 1; y_G - 4; z_G) + (x_G + 1; y_G - 4; z_G) = (0;0;0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_G - 1 = 0 \\ 3y_G - 10 = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$ $G\left(\frac{1}{3} ; \frac{10}{3} ; 0\right)$

(5) Calcule les coordonnées du centre de gravité G du tétraèdre $ABCD$.

$\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} + \vec{DG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (x_G ; y_G - 3 ; z_G - 2) + (x_G - 1; y_G - 2; z_G) + (x_G - 1; y_G - 4; z_G) + (x_G + 1; y_G - 4; z_G) = (0;0;0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_G - 1 = 0 \\ 4x_G - 13 = 0 \\ 4z_G - 2 = 0 \end{cases}$ $G\left(\frac{1}{4} ; \frac{13}{4} ; \frac{1}{2}\right)$

9. Complète les égalités suivantes, sans ajouter de point sur la figure :

(1) $\overrightarrow{RM} + \overrightarrow{IJ} = \vec{RP}$ ou tout autre vecteur égal

(2) $-2\overrightarrow{BC} = \vec{CA}$

(3) $\overrightarrow{LT} + \overrightarrow{TR} = \vec{LR}$

(4) $\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{JO} = \vec{GH} + \vec{OJ} = \vec{GH} + \vec{HN} = \vec{GN}$

(5) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{TR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IH} = \vec{AF} + \vec{FB} + \vec{IN}$

$= \vec{AB} + \vec{IN}$

$= \vec{HI} + \vec{IN}$

$= \vec{HN}$