UAA 3 : Asymptotes et limites
Solutions

B. Limites en l'infini

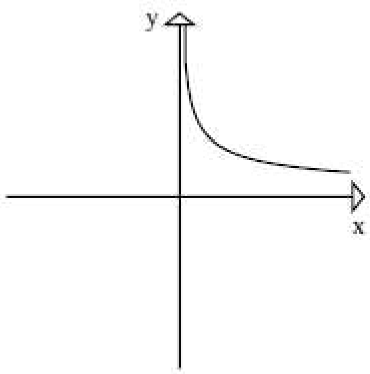
5. Exercices

1. Détermine graphiquement chacune des limites :

   (1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

   (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

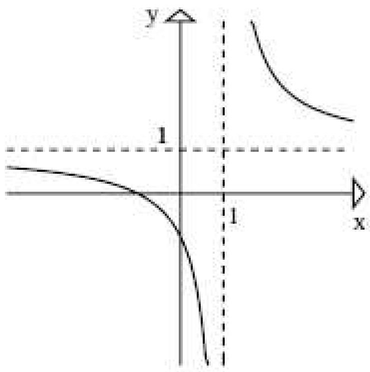
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \nexists$

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

2. Calcule les limites suivantes et donnes-en une interprétation graphique :

   (1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x^2 + 7x - 3\right) = +\infty$ ➔ Au plus les abscisses augmentent, au plus les images augmentent.

   (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-5x^2 - 6x + 2\right) = -\infty + \infty$ CI

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(-5x^2 . \left(1 + \frac{6}{5x} - \frac{2}{5x^2} \right) \right)$$

$= -\infty$ ➔ Au plus les abscisses diminuent, au plus les images diminuent.

$$(3)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x+4}{2x^2+3x+11}=\frac{+\infty-\infty}{+\infty}\quad \text{CI}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2\left(1-\frac{3}{5x}+\frac{4}{5x^2}\right)}{2x^2\left(1+\frac{3}{2x}+\frac{11}{2x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5\left(1-\frac{3}{5x}+\frac{4}{5x^2}\right)}{2\left(1+\frac{3}{2x}+\frac{11}{2x^2}\right)}$$

$$\boxed{=\frac{5}{2}\ \Rightarrow\ AH_{+\infty}\equiv y=\frac{5}{2}}$$

$$(4)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3-x}=\frac{2}{-\infty}\boxed{=0\ \Rightarrow\ AH_{+\infty}\equiv y=0}$$

$$(5)\quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{2x^2}{1-x}}=\sqrt{\frac{+\infty}{+\infty}}\quad \text{CI}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{2x^2}{-x\left(-\frac{1}{x}+1\right)}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{2x}{-\left(-\frac{1}{x}+1\right)}}=\sqrt{\frac{-\infty}{-1}}=\sqrt{+\infty}$$

$=+\infty$ ➔ Au plus les abscisses diminuent, au plus les images augmentent.

$$(6)\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5-2x^3+4x-2}{3x^6+9x+3}=\frac{-\infty+\infty-\infty}{+\infty-\infty}\quad \text{CI}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5\left(1-\frac{2}{3x^2}+\frac{4}{x^4}-\frac{2}{3x^5}\right)}{3x^6\left(1+\frac{3}{x^5}+\frac{1}{x^6}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{2}{3x^2}+\frac{4}{x^4}-\frac{2}{3x^5}}{x\left(1+\frac{3}{x^5}+\frac{1}{x^6}\right)}\boxed{=0\ \Rightarrow\ AH_{-\infty}\equiv y=0}$$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^6+5x^3-9x+2}{-2x^4-3x^2+2x} = \dfrac{+\infty-\infty}{-\infty-\infty+\infty}$ CI

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^6\left(1+\frac{5}{4x^3}-\frac{9}{4x^5}+\frac{1}{2x^6}\right)}{-2x^4\left(1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2\left(1+\frac{5}{4x^3}-\frac{9}{4x^5}+\frac{1}{2x^6}\right)}{-\left(1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$=-\infty$ ➔ Au plus les abscisses augmentent, au plus les images diminuent.

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{7x^3-4x^2}+\sqrt{x^2+5}\right) = \sqrt{+\infty-\infty}+\infty$ CI

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{7x^3\left(1-\frac{4}{7x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}\right) = +\infty+\infty$$

$=+\infty$ ➔ Au plus les abscisses augmentent, au plus les images augmentent.

(9) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{7x^5+2x^2+x}-\sqrt{x^4+3x^2+x}\right) = \sqrt{-\infty+\infty-\infty}-\sqrt{+\infty-\infty}$ CI

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{7x^5\left(1+\frac{2}{7x^3}+\frac{1}{7x^4}\right)}-\sqrt{x^4\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}\right) = \sqrt{-\infty}-\sqrt{+\infty}$ Ce qui n'existe pas

Cette limite n'a pas de sens (le domaine de définition ne permet pas de calculer la limite en $-\infty$)

(10) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{8x^4+3x^2+2x}-\sqrt{7x^4-7x^2+2}\right) = \sqrt{+\infty-\infty}-\sqrt{+\infty-\infty}\ +\infty$ CI

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{8x^4\left(1+\frac{3}{8x^2}+\frac{1}{4x^3}\right)}-\sqrt{7x^4\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{7x^4}\right)}\right) = \sqrt{+\infty}-\sqrt{+\infty} \text{ CI}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{8}.x^2\sqrt{1+\frac{3}{8x^2}+\frac{1}{4x^3}}-\sqrt{7}.x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{7x^4}}\right) = +\infty-\infty \text{ CI}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{8}.x^2\left(\sqrt{1+\frac{3}{8x^2}+\frac{1}{4x^3}}-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{7x^4}}\right)=+\infty$$

➔ Au plus les abscisses diminuent, au plus les images augmentent.

$$(11) \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=+\infty-\infty \text{ CI}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}-x\right)=+\infty-\infty \text{ CI}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)}-x\right)=+\infty-\infty \text{ CI}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}\right)}-1\right)=+\infty.0 \text{ CI}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right).\frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

$=1$ ➔ $AH_{+\infty} \equiv y=1$

$$(12) \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x^2-1}}{x^2-2x}=\frac{+\infty-\infty}{+\infty-\infty} \text{ CI}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}-\sqrt{4x^2\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)}}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{+\infty-\infty}{+\infty} \text{ CI}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-2x\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{+\infty-\infty}{+\infty} \text{ CI}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-2\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{+\infty.(-1)}{+\infty} \text{ CI}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-2\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{-1}{+\infty}$$

$$\boxed{= 0 \Rightarrow AH_{+\infty} \equiv y = 0}$$

(13) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+3x}-\sqrt{3x^2+3}}{x^2+\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{+\infty-\infty}-\infty}{+\infty} \text{ CI}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4\left(1+\frac{3}{x^3}\right)}-\sqrt{3x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x^2+\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}} = \frac{\sqrt{+\infty}-\infty}{+\infty} \text{ CI}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\sqrt{1+\frac{3}{x^3}}-\sqrt{3}.(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2+(-x)\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \frac{+\infty+\infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ CI}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^3}}+\frac{\sqrt{3}}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ CI}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^3}}+\frac{\sqrt{3}}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \frac{1}{1}$$

$$\boxed{=1 \Rightarrow AH_{-\infty} \equiv y = 1}$$

(14) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x}-\sqrt{x^4+2x}}{x^2+1}=\dfrac{+\infty-\infty}{+\infty}$ CI

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}-\sqrt{x^4\left(1+\frac{2}{x^3}\right)}}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{+\infty-\infty}{+\infty}\text{ CI}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{2}{x^3}}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{+\infty.0}{+\infty}\text{ CI}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{2}{x^3}}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}\text{ CI}$$

$$\boxed{=0 \Rightarrow AH_{+\infty}\equiv y=0}$$

(15) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+2-3x}{x}=\dfrac{+\infty-\infty}{+\infty}$ CI

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}-3\right)}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}\text{ CI}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}-3$$

$$\boxed{=-3 \Rightarrow AH_{+\infty}\equiv y=-3}$$

3. Soit f et g deux fonctions. Justifie par un contre-exemple que les implications suivantes sont fausses :

(1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = 0$

Il y a plusieurs possibilités, en voici une : $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.

Ces deux fonctions sont bien telles que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ mais

$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left[x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right] = +\infty$.

(2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Il y a plusieurs possibilités, en voici une : $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.

Ces deux fonctions sont bien telles que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ mais

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

(3) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{g(x)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x).g(x) = 0$

Il y a plusieurs possibilités, en voici une : $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

Ces deux fonctions sont bien telles que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{g(x)} = +\infty$ mais

$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x).g(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^2.x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^3\right) = +\infty$