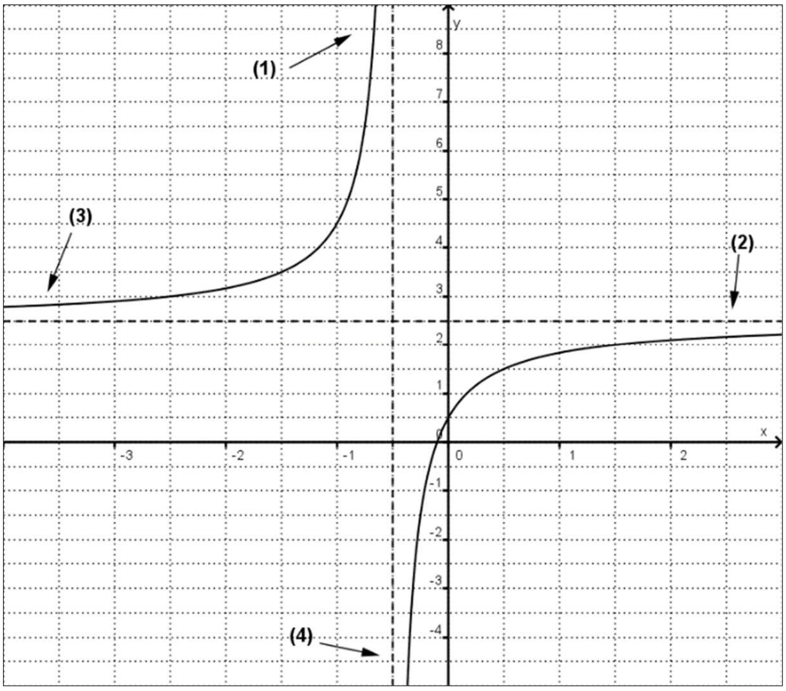
UAA 3 : Asymptotes et limites
Solutions

C. Limites et asymptotes

4. Exercices

1. Traduis les situations suivantes en termes de limites. Ecris l'équation des asymptotes.

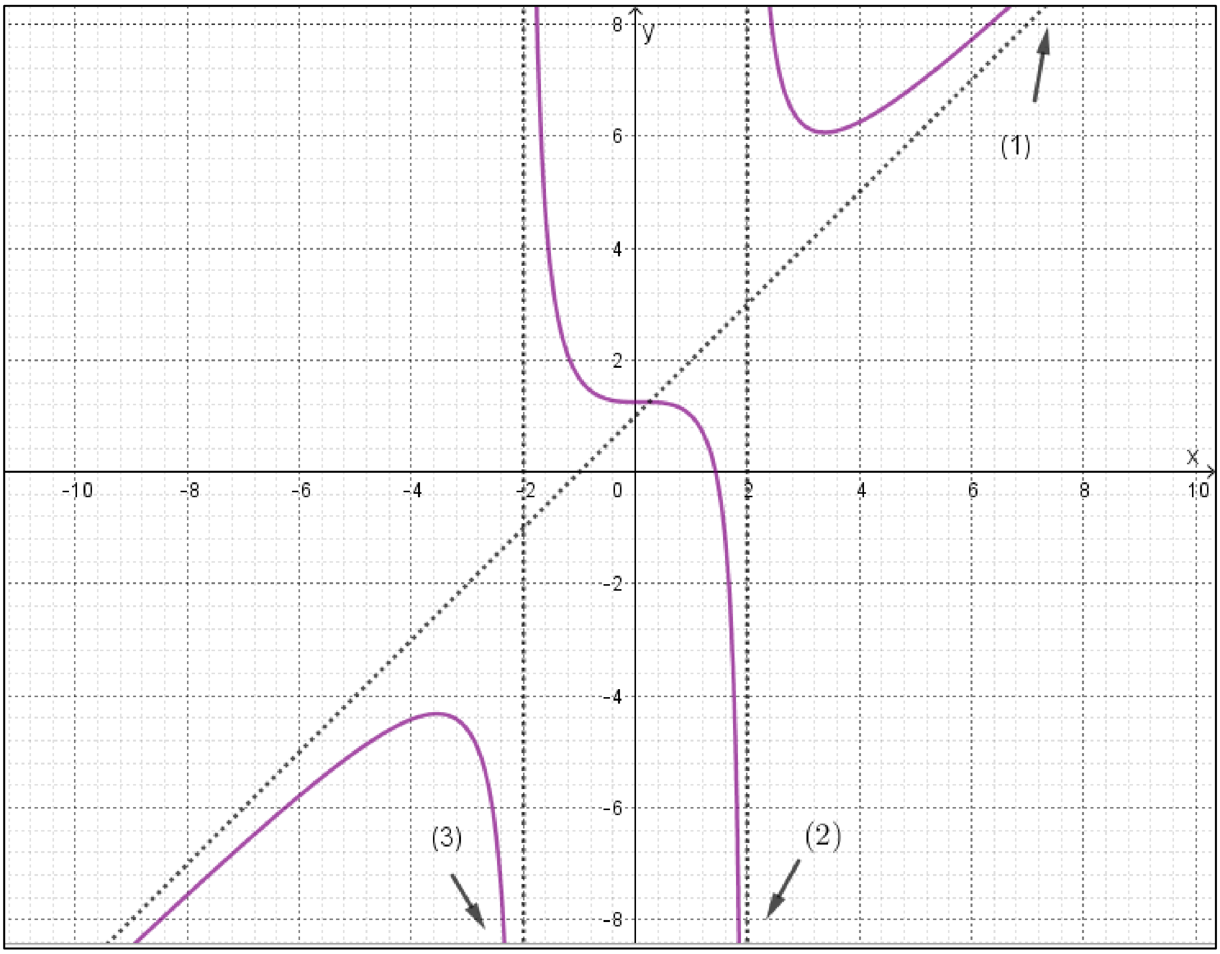


(1) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ $\qquad AH \equiv y = \frac{5}{2}$

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ $\qquad AV \equiv x = -\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$

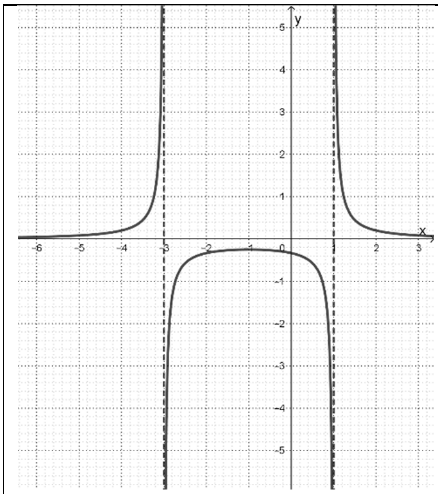


(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\quad AV \equiv x = 2$

(2) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ $\quad AV \equiv x = -2$

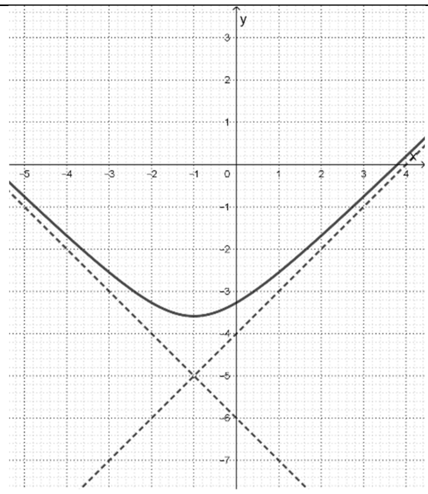
(3) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$ $\quad AO \equiv y = x+1$

2. Ecris les équations des asymptotes des fonctions représentées ci-dessous :



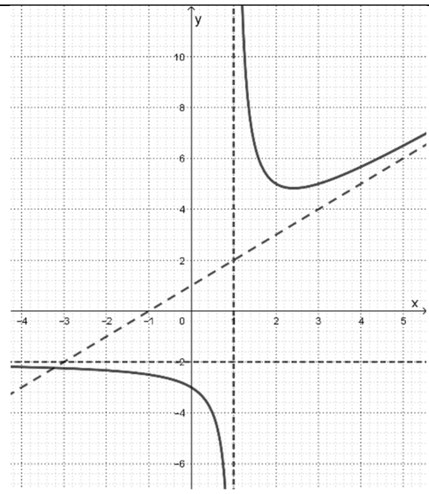
$AV \equiv x = -5$

$AV \equiv x = 1$



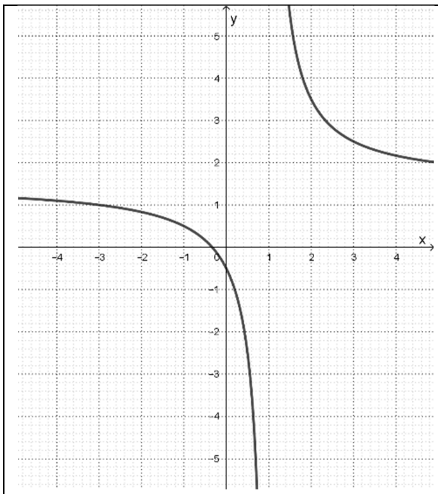
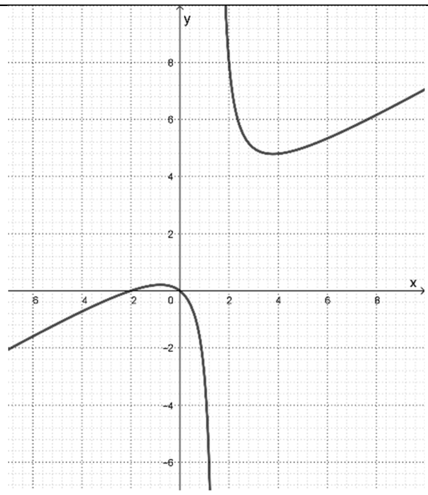
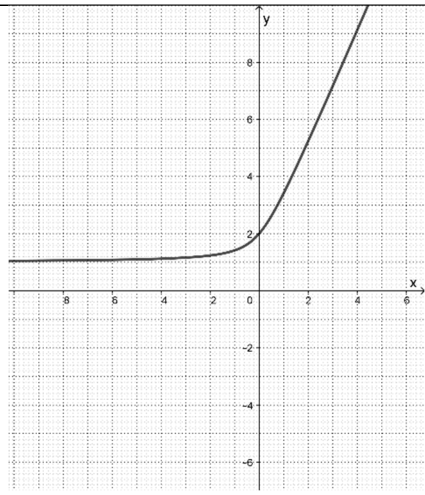
$AH_{-\infty} \equiv y = -x-6$

$AH_{+\infty} \equiv y = x-4$



$AO_{+\infty} \equiv y = x+1$ $\quad AV \equiv x = 1$

$AH_{-\infty} \equiv y = -2$

		
$AH \equiv y = \frac{3}{2}$ $AV \equiv x = 1$	$AV \equiv x = \frac{3}{2}$ $AO \equiv y = \frac{1}{2}x + 2$	$AO_{+\infty} \equiv y = 2x + 1$ $AH_{-\infty} \equiv y = 1$

3. Trace le graphique d'une fonction qui satisfait à toutes les conditions.

(1) $AV \equiv x = -2$ $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = +\infty$ Minimum en $x = 0$

Racines en $-3 ; 3$ et 6 $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -1$

(2) Maximum en $x = -2$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ $AO_{+\infty} \equiv y = 2x + 1$

Il existe plusieurs possibilités.

4. Pour chacune des fonctions suivantes, détermine le domaine de définition, calcule, si elles existent les limites en les réels qui adhèrent au domaine de définition sans lui appartenir. A défaut, calcule les limites à gauche et à droite correspondantes, si elles existent. Ecris l'équation de toutes les asymptotes. Esquisse le graphique.

   (1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-5}$

CE : $x-5\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 5$

➔ $\boxed{dom\, f=\mathbb{R}\setminus\{5\}}$

AV : $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x+1}{x-5}=\dfrac{11}{0}$ CI

x		5	
$x-5$	$-$	0	$+$

$$= \begin{cases} \nearrow \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\dfrac{11}{0^-}=-\infty \\ \searrow \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\dfrac{11}{0^+}=+\infty \end{cases}$$

➔ $\boxed{AV\equiv x=5}$

AH : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{x-5}=\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ CI

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)}{x\left(1-\dfrac{5}{x}\right)}$$

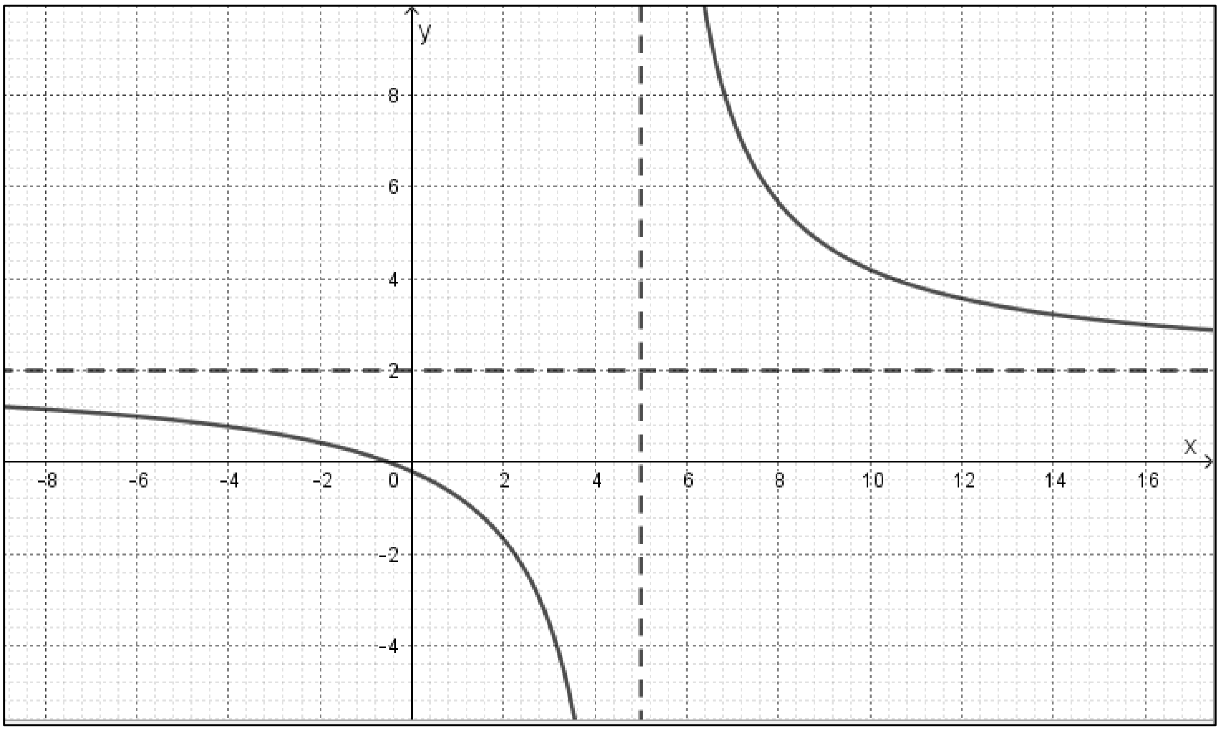
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)}{1-\dfrac{5}{x}}$$

$=2$

➔ $\boxed{AH\equiv y=2}$

AO : Il n'y a pas d'asymptote oblique car il y a déjà une asymptote horizontale.

Graphique :



(2) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{3x^2+7x+2}$

CE : $3x^2+7x+2\neq 0$

Racines : $3x^2+7x+2=0$

$$\Delta=7^2-4.3.2=25$$

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm 5}{6}=-\frac{1}{3};-2$$

$\Rightarrow$ $\boxed{dom\, f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3};-2\right\}}$

AV : $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{3x^2+7x+2}=\dfrac{\frac{200}{27}}{0}$ CI

x		-2		$-\frac{1}{3}$	
$3x^2+7x+2$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$= \begin{cases} \nearrow \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}^-} f(x)=\dfrac{\frac{200}{27}}{0^-}=-\infty \\ \searrow \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}^+} f(x)=\dfrac{\frac{200}{27}}{0^+}=+\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{AV\equiv x=-\frac{1}{3}}$

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{3x^2+7x+2}=\dfrac{0}{0}$ CI

	1	-2	-5	6
-2	↓	-2	8	-6
	1	-4	3	0

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-4x+3)}{3(x+2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x^2-4x+3}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}$$

$$= -3$$

➔ $\boxed{\text{Point creux en } (-2;-3)}$

AH : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{3x^2+7x+2} = \dfrac{\pm\infty-\infty\mp\infty}{+\infty\pm\infty}$ CI

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)}{3x^2\left(1+\frac{7}{3x}+\frac{2}{3x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)}{3\left(1+\frac{7}{3x}+\frac{2}{3x^2}\right)}$$

$$= \frac{\pm\infty}{3}$$

$$= \pm\infty$$

➔ $\boxed{\text{Pas d'AH}}$

AO : $a \quad = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x}$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-2x^2-5x+6}{3x^3+7x^2+2x} = \frac{\pm\infty-\infty\mp\infty}{\pm\infty+\infty\pm\infty} \text{ CI}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)}{3x^3\left(1+\frac{7}{3x}+\frac{2}{3x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}}{3\left(1+\frac{7}{3x}+\frac{2}{3x^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$b \quad = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x)-\dfrac{1}{3}x\right)$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x^2-5x+6}{3x^2+7x+2}-\frac{1}{3}x\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2-5x+6-\left(x^3+\frac{7}{3}x^2+\frac{2}{3}x\right)}{3x^2+7x+2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2-5x+6-x^3-\frac{7}{3}x-\frac{2}{3}x}{3x^2+7x+2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{13}{3}x^2-\frac{17}{3}x+6}{3x^2+7x+2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{13}{3}x^2\left(1+\frac{17}{13x}-\frac{18}{13x^2}\right)}{3x^2\left(1+\frac{7}{3x}+\frac{2}{3x^2}\right)}$$

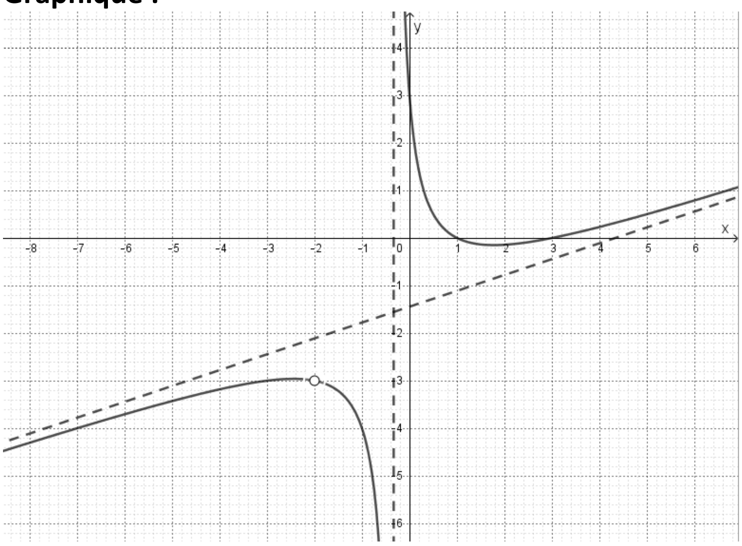
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{13}{3}\left(1+\frac{17}{13x}-\frac{18}{13x^2}\right)}{3\left(1+\frac{7}{3x}+\frac{2}{3x^2}\right)}$$

$$=\frac{-\frac{13}{3}}{3}$$

$$=\frac{-13}{9}$$

➔ $\boxed{AO \equiv y=\frac{1}{3}x-\frac{13}{9}}$

Graphique :



(3) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$

CE : $x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$

➔ $\boxed{dom\, f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}}$

AV : $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}=\dfrac{1}{0}$

x		-2	
$x+2$	$-$	0	$+$

$$= \begin{cases} \nearrow \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \\ \searrow \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \end{cases}$$

➔ $\boxed{AV\equiv x=-2}$

AH : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}=\dfrac{+\infty\pm\infty}{\pm\infty}$ CI

$$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2\left(1+\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}$$

$$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x\left(1+\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2x^2}\right)}{1+\dfrac{2}{x}}=\pm\infty$$

➔ $\boxed{\text{Pas d'AH}}$

AO : a

$$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}}{x}$$

$$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+3x-1}{x^2+2x}$$

$$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2\left(1+\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\left(1+\frac{3}{2x}-\frac{1}{2x^2}\right)}{1+\frac{2}{x}}$$

$$= 2$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2+3x-1}{x+2}-2x\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3x-1-2x(x+2)}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3x-1-2x^2-4x}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x-1}{x+2} = \frac{\mp\infty}{\pm\infty} \text{ CI}$$

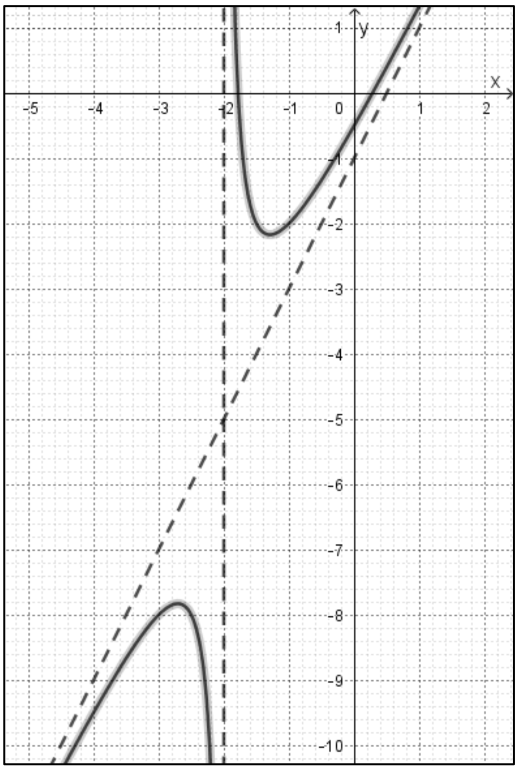
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{2}{x}}$$

$$= -1$$

➔ $\boxed{AO \equiv y = 2x-1}$

Graphique :



(4) $f(x)=\sqrt{4x^2+3x}-2x+1$

CE : $4x^2+3x\geq 0$

Racines : $4x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(4x+3)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\dfrac{3}{4}$

x		$-\dfrac{3}{4}$		0	
$4x^2+3x$	+	0	−	0	+

➔ $dom\, f = \leftarrow;-\dfrac{3}{4}\Big]\cup[0;\rightarrow$

AV : Il n'y a pas d'asymptote verticale car tous les réels adhérents au domaine appartiennent au domaine.

AH : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x+1\right)=+\infty-\infty$ CI

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2x\sqrt{1+\frac{3}{4x^2}}-2x+1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2x\left(\sqrt{1+\frac{3}{4x^2}}-1+\frac{1}{2x}\right)=+\infty.0 \text{ CI}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-(2x-1)\right).\frac{\sqrt{4x^2+3x}+(2x-1)}{\sqrt{4x^2+3x}+(2x-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3x-(2x-1)^2}{\sqrt{4x^2+3x}+(2x-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3x-(2x-1)^2}{\sqrt{4x^2+3x}+(2x-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3x-\left(4x^2-4x+1\right)}{\sqrt{4x^2+3x}+(2x-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x-1}{\sqrt{4x^2+3x}+(2x-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x\left(1-\dfrac{1}{7x}\right)}{2x\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{4x^2}}+1-\dfrac{1}{2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{7\left(1-\frac{1}{7x}\right)}{2\left(\sqrt{1+\frac{3}{4x^2}}+1-\frac{1}{2x}\right)}$$

$$=\frac{7}{4}$$

➔ $\boxed{AH_{+\infty} \equiv y=\frac{7}{4}}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x+1\right)=\sqrt{+\infty-\infty}+\infty \text{ CI}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-2x\sqrt{1+\frac{3}{4x^2}}-2x+1\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-2x\left(\sqrt{1+\frac{3}{4x^2}}+1-\frac{1}{2x}\right)=+\infty.(1+1)=+\infty$$

➔ $\boxed{\text{Pas d'asymptote horizontale en } -\infty}$

AO : a $$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3x}-2x+1}{x}=\frac{\sqrt{+\infty-\infty}+\infty}{-\infty}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x\left(\sqrt{1+\frac{3}{4x}}+1-\frac{1}{2x}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-2\left(\sqrt{1+\frac{3}{4x}}+1-\frac{1}{2x}\right)$$

$$=-4$$

b $$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x+1+4x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}+2x+1\right)=\sqrt{+\infty-\infty}+\infty \text{ CI}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-2x\left(\sqrt{1+\frac{3}{4x}}-1-\frac{1}{2x}\right)=+\infty.0 \text{ CI}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}+2x+1\right).\frac{\sqrt{4x^2+3x}-(2x+1)}{\sqrt{4x^2+3x}-(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+3x-(2x+1)^2}{\sqrt{4x^2+3x}-(2x+1)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+3x-\left(4x^2+4x+1\right)}{\sqrt{4x^2+3x}-2x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-1}{\sqrt{4x^2+3x}-2x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-2x\left(\sqrt{1+\frac{4}{3x}}+1+\frac{1}{2x}\right)}$$

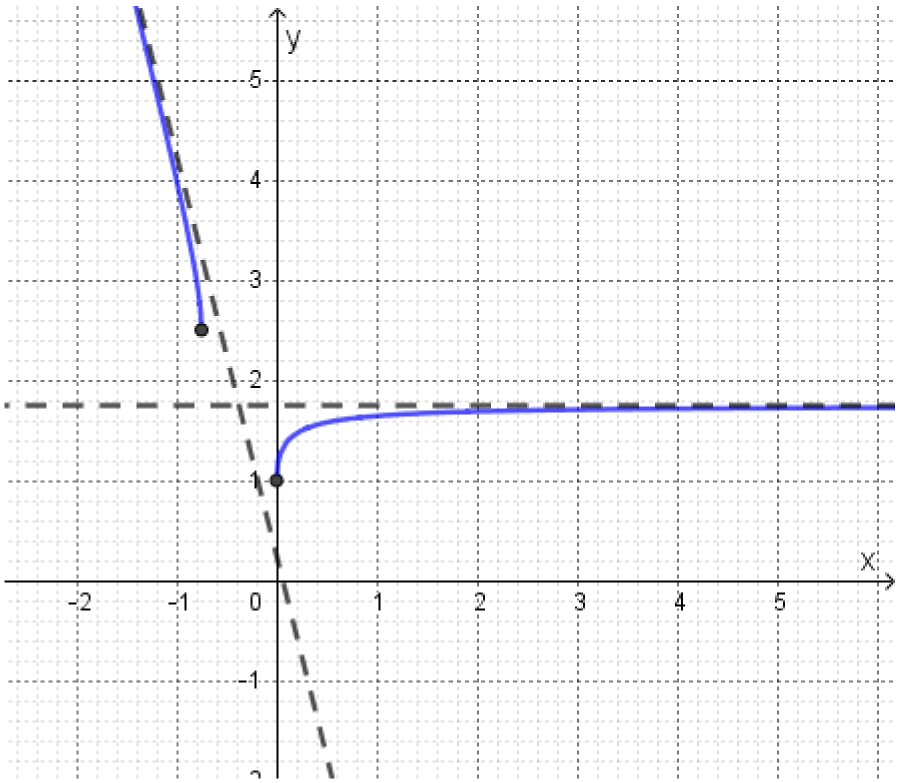
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{2\left(\sqrt{1+\frac{4}{3x}}+1+\frac{1}{2x}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{AO \equiv y = -4x + \frac{1}{4}}$

Graphique :

Comme le domaine de définition est $dom\, f = \left.\leftarrow;-\frac{3}{4}\right] \cup \left[0;\rightarrow\right.$, il est intéressant de calculer les images de $-\frac{3}{4}$ et 0.



(5) $f(x)=\dfrac{3x+\sqrt{4x^2+2x+6}}{\sqrt{9x^2-4}}$

CE 1 : $4x^2+2x+6\geq 0$

Racines : $4x^2+2x+6=0$

$\Delta=2^2-4.2.6=-44$

⇨ Pas de racine

⇨ $4x^2+2x+6$ est toujours ≥ 0 (car $a\geq 0$)

CE 2 : $9x^2-4>0$

Racines : $9x^2-4=0\Leftrightarrow(3x+2)(3x-2)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$ ou $x=\dfrac{2}{3}$

x		$-\dfrac{2}{3}$		$\dfrac{2}{3}$	
$9x^2-4$	+	0	−	0	+

➔ $dom\, f=\left]-\infty;-\dfrac{2}{3}\right[\cup\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$

AV : $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}^-}\dfrac{3x+\sqrt{4x^2+2x+6}}{\sqrt{9x^2-4}}=\dfrac{0,54}{0}$ CI

$=\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}^-}f(x)=\dfrac{0,54}{0^+}=+\infty$ (Le tableau de signe est déjà fait)

La $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}^+}f(x)$ n'existe pas car la fonction n'est pas définie à droite de $-\dfrac{2}{3}$.

➔ $\boxed{AV\equiv x=-\dfrac{2}{3}^-}$

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{3x+\sqrt{4x^2+2x+6}}{\sqrt{9x^2-4}}=\frac{5,02}{0}\ \text{CI}$$

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}^+} f(x)=\frac{5,02}{0^+}=+\infty$$

La limite $\lim_{x\to\frac{2}{3}^-} f(x)$ n'existe pas car la fonction n'est pas définie à gauche de $\frac{2}{3}$

➔ $\boxed{AV \equiv x=\frac{2}{3}^+}$

AH : $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sqrt{4x^2+2x+6}}{\sqrt{9x^2-4}}=\frac{+\infty}{+\infty}\ \text{CI}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2x\sqrt{1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2x^2}}}{3x\sqrt{1-\frac{4}{9x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2x^2}}\right)}{3x\sqrt{1-\frac{4}{9x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{3}\sqrt{1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2x^2}}}{\sqrt{1-\frac{4}{9x^2}}}$$

$$=\frac{5}{3}$$

➔ $\boxed{AH_{+\infty} \equiv y=\frac{5}{3}}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+\sqrt{4x^2+2x+6}}{\sqrt{9x^2-4}}=\frac{-\infty+\sqrt{+\infty-\infty}}{+\infty}\quad \text{CI}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2x\sqrt{1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2x^2}}}{-3x\sqrt{1-\frac{4}{9x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2x^2}}\right)}{-3x\sqrt{1-\frac{4}{9x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{3}\sqrt{1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2x^2}}}{-\sqrt{1-\frac{4}{9x^2}}}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

➔ $\boxed{AH_{-\infty}\equiv y=-\frac{1}{3}}$

AO : Il n'y a pas d'asymptote oblique car la fonction admet une AH en $+\infty$ et en $-\infty$

Graphique :