

LIMITES ET ASYMPTOTES

Limites en l'infini

C. SCOLAS



<https://bit.ly/4f62DKq>



SD

1. Calcule les limites suivantes et donne-en une interprétation graphique¹ :

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 2x + 7) = -\infty + \infty \text{ CI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 \left(1 - \frac{2}{5x^2} + \frac{7}{5x^3} \right)$$

$$= -\infty$$

$\Rightarrow$ Au plus les abscisses diminuent, au plus les images diminuent.

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3-x}}{x} = \frac{\sqrt{-\infty}}{+\infty} \nexists \quad \text{Cette limite n'a pas de sens.}$$

$$(\text{dom } f = \leftarrow; 3] \setminus \{0\})$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{5-x} = \frac{4}{+\infty} = 0 \quad \Rightarrow AH_{-\infty} = y=0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3x^3 + 4}{2x^3 + x^2 - 1} = \frac{-\infty + \infty}{-\infty + \infty} \text{ CI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3 \left(\frac{2}{-3x^3} + 1 - \frac{4}{3x^3} \right)}{2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^3} \right)}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow AH_{-\infty} = y = -\frac{3}{2}$$

¹ Indique si le calcul de limite mène à un cas impossible, à une asymptote horizontale dont tu donnes l'équation ou à une situation du type « Au plus les abscisses diminuent au plus les images augmentent ».

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 8} - 2x) = +\infty - \infty \text{ CI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} - 2x \right)$$

$$\downarrow \sqrt{4x^2} = |2x| = 2x \quad \text{car } x \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - 2x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - 1 \right) = +\infty \cdot 0 \text{ CI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 8} - 2x \right) \cdot \frac{\sqrt{4x^2 + 8} + 2x}{\sqrt{4x^2 + 8} + 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 8 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 8} + 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{2x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + 1 \right)}$$

← On utilise ce qui a été fait plus haut

$$= 0 \quad \Rightarrow AH_{+\infty} = y = 0$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2} + \sqrt{x^4 - 3x}}{\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{+\infty + \infty}{\sqrt{+\infty - \infty}} \text{ CI}$$

$$\downarrow \sqrt{x^4} = x^2 \text{ et } \sqrt{x^2} = |x| = -x \text{ car } x \rightarrow -\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \sqrt{1 + \frac{2}{x^4}} + x^2 \sqrt{1 - \frac{3}{x^3}}}{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^4}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x^3}} \right)}{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}$$

$$= \frac{-\infty \cdot (1 + 1)}{-1 \cdot 1}$$

$= +\infty \Rightarrow$ Au plus les abscisses diminuent, au plus les images augmentent.

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^3 - 2x} + \sqrt{x^2 + 1}) = \sqrt{+\infty - \infty} + \infty \quad \text{CI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{3x^2}\right)} + \sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} \right)$$

$$= +\infty + \infty$$

$= +\infty \Rightarrow$ Au plus les abscisses augmentent, au plus les images augmentent.

$$(8) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^4 - 6x} - \sqrt{5x^4 + 3x^2}) = \sqrt{+\infty - \infty} - (+\infty) \quad \text{CI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{3x^4 \cdot \left(1 - \frac{2}{x^3}\right)} - \sqrt{5x^4 \cdot \left(1 + \frac{3}{5x^2}\right)} \right) = +\infty - \infty \quad \text{CI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{3} x^2 \sqrt{1 - \frac{2}{x^3}} - \sqrt{5} x^2 \sqrt{1 + \frac{3}{5x^2}} \right) = +\infty - \infty \quad \text{CI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{x^3}} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{5x^2}} \right)$$

$$= +\infty \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})$$

$= -\infty \Rightarrow$ Au plus les abscisses augmentent, au plus les images diminuent.

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x} - \sqrt{x^4 - 3}}{\sqrt{x^2 - 4x}} = \frac{+\infty - \infty}{\sqrt{+\infty - \infty}} \quad \text{CI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 \cdot \left(1 + \frac{2}{x^3}\right)} - \sqrt{x^4 \cdot \left(1 - \frac{3}{x^4}\right)}}{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 - \frac{4}{x}\right)}}$$

$$\sqrt{x^4} = x^2 \text{ et } \sqrt{x^2} = |x|$$

$$= x \text{ car } x \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^3}} - \sqrt{1 - \frac{3}{x^4}} \right)}{x \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{x}}} = \frac{+\infty \cdot 0}{1} \quad \text{CI}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x} - \sqrt{x^4 - 3}}{\sqrt{x^2 - 4x}} \cdot \frac{\sqrt{x^4 + 2x} + \sqrt{x^4 - 3}}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^4 - 3}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 2x - (x^4 - 3)}{\sqrt{x^2 - 4x} \cdot (\sqrt{x^4 + 2x} + \sqrt{x^4 - 3})} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2x} \cdot (1 + \frac{3}{2x})}{\cancel{x} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{x}} \cdot (x^2 \cdot (\sqrt{1 + \frac{2}{x^3}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x^4}}))} \\
&= \frac{2}{1 \cdot +\infty \cdot 2} \\
&= 0 \quad \Rightarrow AH_{+\infty} = y = 0
\end{aligned}$$

2. Trace le graphique d'une seule fonction f qui vérifie toutes les conditions suivantes :

- (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- (2) $AH_{+\infty} \equiv y = 3$
- (3) f possède un point creux en $(-1; -2)$
- (4) $AV \equiv x = 4$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$

