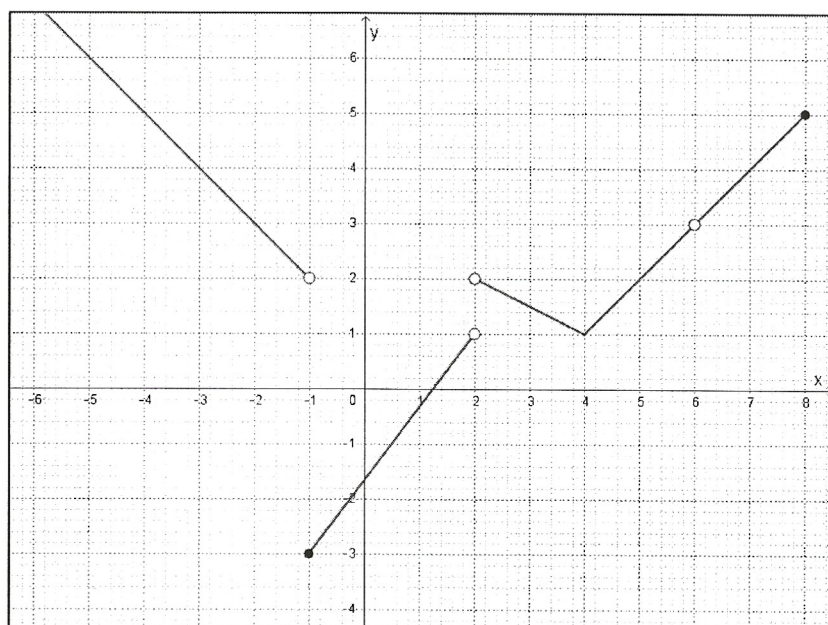


1. Pour la fonction f dont voici le graphique, donne la valeur demandée, si elle existe. Si elle n'existe pas, explique pourquoi.



(1) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -3$

(2) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$

(3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \text{ne existe pas}$ car $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

(4) $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 3$

(5) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{ne existe pas}$ car $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

(6) $\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \text{ne existe pas}$ car la fonction n'est pas définie pour $x > 8$.

(7) $f(-1) = -3$

2. Calcule les limites suivantes (distingue éventuellement les limites à gauche et à droite) et donne une interprétation graphique¹ du résultat :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \frac{-1}{0} \text{ ci}$$

$$\begin{array}{c|cc} x & -2 & 2 \\ \hline x^2-4 & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow AV \equiv x=2$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+5}{x+3} = \frac{2}{0} \text{ ci}$$

$$\begin{array}{c|c} x & -3 \\ \hline x+3 & - & 0 & + \end{array}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow AV \equiv x=-3$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+5}{x^3+3x^2-4} = \frac{7}{0} \text{ ci}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & 0 & -4 \\ \hline 1 & \downarrow & 1 & 4 & 4 \\ & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

Racines ①: $x^3+3x^2-4=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2=0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} TS: & x & -2 & 1 & \\ \hline & x-1 & - & - & - & 0 & + \\ & (x+2)^2 & + & 0 & + & + & + \\ & x^3+3x^2-4 & - & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

$\Rightarrow AV \equiv x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{0}{0} \text{ ci}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1+x^2)}{x \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2+x}{x \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \cdot (x-1)}{x \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \text{Trou en } (0; \frac{1}{2})$

¹ Indique si le calcul de limite mène à un cas impossible (a n'appartient pas au domaine de définition de la fonction), à un point du graphique dont tu donnes les coordonnées, à un point creux dont tu donnes également les coordonnées ou à une asymptote verticale dont tu donnes l'équation.

$$(5) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{3x^2+5x-2} = \frac{-1}{0} \text{ ci}$$

Racine ①: $3x^2+5x-2=0$

$$\Delta = 25+24=49$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{6} \begin{matrix} 1/3 \\ -2 \end{matrix}$$

TS:	x	-2	$1/3$
	$3x^2+5x-2$	0	$-$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow AV = x = -2$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^3+2x+7}-2}{x+1} = \frac{0}{0} \text{ ci}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^3+2x+7}-2}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x^3+2x+7}+2}{\sqrt{x^3+2x+7}+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+2x+7-4}{(x+1)(\sqrt{x^3+2x+7}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+2x+3}{(x+1)(\sqrt{x^3+2x+7}+2)}$$

	1	0	2	3
-1	↓	-1	1	-3
	1	-1	3	0

$$(7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-\sqrt{4x+1}}{(x+2)-\sqrt{5x+6}} = \frac{0}{0} \text{ ci}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-\sqrt{4x+1}}{(x+2)-\sqrt{5x+6}} \cdot \frac{3+\sqrt{4x+1}}{3+\sqrt{4x+1}} \cdot \frac{(x+2)+\sqrt{5x+6}}{(x+2)+\sqrt{5x+6}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(9-(4x+1)) \cdot (x+2+\sqrt{5x+6})}{((x+2)^2-(5x+6)) \cdot (3+\sqrt{4x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-4x-8) \cdot (x+2+\sqrt{5x+6})}{(x^2+4x+4-5x-6) \cdot (3+\sqrt{4x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-4 \cdot (x+2) \cdot (x+2+\sqrt{5x+6})}{(x^2+x-2) \cdot (3+\sqrt{4x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-4 \cdot (x+2) \cdot (x+2+\sqrt{5x+6})}{(x-1)(x+2)(3+\sqrt{4x+1})} = \frac{-32}{6} = -\frac{16}{3}$$

② $\Delta = 9$
 $x = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$

$$\Rightarrow \text{Trou en } (2; -\frac{16}{3})$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2x^2 + 5x - 12}{4x^2 - 12x + 9} = \frac{0}{0} \text{ ci}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2 \cdot (x - \frac{3}{2}) \cdot (x + 4)}{4 \cdot (x - \frac{3}{2})^2}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} + 4}{2 \cdot (x - \frac{3}{2})} = \frac{\frac{11}{2}}{0} \text{ ci}$$

$$TS: \frac{x}{2(x - \frac{3}{2})} \bigg| \frac{\frac{3}{2}}{-0+}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x-5} - 2}{\frac{1}{1-x} - x} = \frac{\frac{0}{-5} - 2}{\frac{1}{0} - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x-5} - \frac{2 \cdot (x-5)}{x-5}}{\frac{1}{1-x} - \frac{x^2}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - 2x + 10}{x-5}}{\frac{1-x^2}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + 10}{x-5} \cdot \frac{x}{1-x^2} = \frac{10}{-5} \cdot \frac{0}{1} = 0$$

$$\Rightarrow (0; 0) \in Gf$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{7-x}} = \frac{0}{0} \text{ ci}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{7-x}} \cdot \frac{\sqrt{2x+3} + x}{\sqrt{2x+3} + x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x+3 - x^2) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x})}{(x+1 - (7-x)) \cdot (\sqrt{2x+3} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(-x^2 + 2x + 3)(\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x})}{(2x-6) \cdot (\sqrt{2x+3} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x+1) \cdot (x-3) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x})}{2 \cdot (x-3) \cdot (\sqrt{2x+3} + x)}$$

$$= \frac{-4 \cdot 4}{2 \cdot 6} = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Trau an } (3; -\frac{2}{3})$$

Racines:

$$\textcircled{N} 2x^2 + 5x - 12 = 0$$

$$\Delta = 25 + 96 = 121$$

$$x = \frac{-5 \pm 11}{4} \begin{matrix} 3/2 \\ -4 \end{matrix}$$

$$\textcircled{D} 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\Delta = 144 - 144 = 0$$

$$x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = \frac{11/2}{0^-} = -\infty$$

$$\Rightarrow AV = x = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = \frac{11/2}{0^+} = +\infty$$

$$\textcircled{N} \Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{-2} \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x}{(-3x+1)(x-2)} = \frac{10}{0} \text{ ci}$$

TS:

x	$1/3$	2
$-3x+1$	$+$ 0	$-$ $-$ $-$
$x-2$	$-$ $-$ $-$	0 $+$
$(-3x+1)(x-2)$	$-$ 0	$+$ 0 $-$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{10}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{10}{0^-} = -\infty$$

$$\Rightarrow AV \equiv x = 2$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{3x^3 + 15x^2 + 6x - 24} = \frac{0}{0} \text{ ci}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x \cdot (x-1)}{(x-1)(3x^2 + 18x + 24)}$$

$$= \frac{2}{45}$$

$$\Rightarrow \text{Thou en} \left(1, \frac{2}{45}\right)$$

	3	15	6	-24
1	↓	3	18	24
	3	18	24	0

3. Trace le graphique d'une seule fonction f qui vérifie toutes les conditions suivantes :

(1) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

(4) $AV \equiv x = 4$

(5) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$

