MATHEMATIQUES

Exercices de révision pour préparer l'examen de juin **5ème 6h**

<u>Avertissement</u> : Ces exercices te permettront de préparer l'examen, ***sans*** toutefois te dispenser de refaire les exercices du cours, les questions de vérification de la compréhension, les exercices numériques et les exercices des interrogations. ***<u>Ces quelques pages ne sont pas du tout un substitut du cours !</u>***

Il est impossible de couvrir en quelques pages l'ensemble des chapitres étudiés durant le deuxième semestre.

TRIGONOMETRIE

Seuls les exercices accompagnés du symbole peuvent être réalisés à l'aide d'une calculatrice.

1. Calcule la valeur exacte (contenant des racines carrées) des expressions suivantes, sans utiliser de calculatrice :

   (1) $\cos 75°$ — *Sol* : $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

   (2) $\sin 165°$ — *Sol* : $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

   (3) $\sin 10°.\cos 20° + \sin 20°.\cos 10°$ — *Sol* : $\dfrac{1}{2}$

   (4) $\cos\dfrac{\pi}{12}$ — *Sol* : $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2. Calcule $\sin(a-b)$, sachant que a et b sont deux angles aigus et que $\cos a = \dfrac{4}{5}$ et $\cos b = \dfrac{3}{5}$.

   Sol : $\sin(a-b) = -\dfrac{7}{25}$

3. Calcule $\cos(a+b)$, sachant que a et b sont deux angles aigus et que $\cos a = \dfrac{8}{17}$ et $\sin b = \dfrac{4}{5}$.

   Sol : $\cos(a+b) = -\dfrac{36}{85}$

4. On donne $\cos 2a = \dfrac{2}{3}$ (avec $\dfrac{\pi}{2} \le a \le \pi$). Calcule $\sin a$.

   Sol : $\sin a = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

5. On donne $\cos a = \dfrac{1}{3}$ avec $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[$ et $\tan b = -4$ avec $b \in \left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$.

   Calcule $\sin(a+b)$.

   Sol : $\dfrac{2\sqrt{34}+4\sqrt{17}}{51}$

6. Une identité par semaine :

7. Résous les équations suivantes en radians et donne les solutions principales :

   (1) $\sin(3x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

   $$x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad SP = \left\{\frac{\pi}{8};\frac{5\pi}{8};\frac{9\pi}{8};\frac{13\pi}{8};\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$$

   (2) $2\sin x + 3\cos x = 0$

   $$x = -0{,}98 + k\pi \qquad SP = \{2{,}16;5{,}30\}$$

   (3) $\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x$

   $$x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{k\pi}{3} \text{ ou } x = k\pi$$

   $$SP = \left\{\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8};\frac{5\pi}{8};\frac{7\pi}{8};\frac{9\pi}{8};\frac{11\pi}{8};\frac{13\pi}{8};\frac{15\pi}{8};0;\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\pi;\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\}$$

   (4) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$

   $$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

   $$SP = \left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$$

(5) $\cos 9x - 2\cos 6x = 2$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \text{ ou } x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$SP = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{2\pi}{9}; \frac{8\pi}{9}; \frac{14\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}; \frac{10\pi}{9}; \frac{16\pi}{9}\right\}$$

(6) $\sin^2 x - 2\sin x.\cos x - 3\cos^2 x = 0$

$$x = 1,25 + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$SP = \left\{1,25; 4,39; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$$

(7) $2\sin^2 3x + \sin^2 6x = 2$

$$x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$SP = \left\{\frac{\pi}{18}; \frac{13\pi}{18}; \frac{25\pi}{18}; \frac{11\pi}{18}; \frac{23\pi}{18}; \frac{35\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}; \frac{29\pi}{18}; \frac{7\pi}{18}; \frac{19\pi}{18}; \frac{31\pi}{18}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$$

(8) $\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$

$$x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$SP = \left\{\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}; \frac{11\pi}{8}; \frac{13\pi}{8}; \frac{15\pi}{8}; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}\right\}$$

DERIVEES ET APPLICATIONS

1. Calcule le taux de variation moyen de la fonction $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ sur l'intervalle $[2;5]$.

   Indique tes calculs.

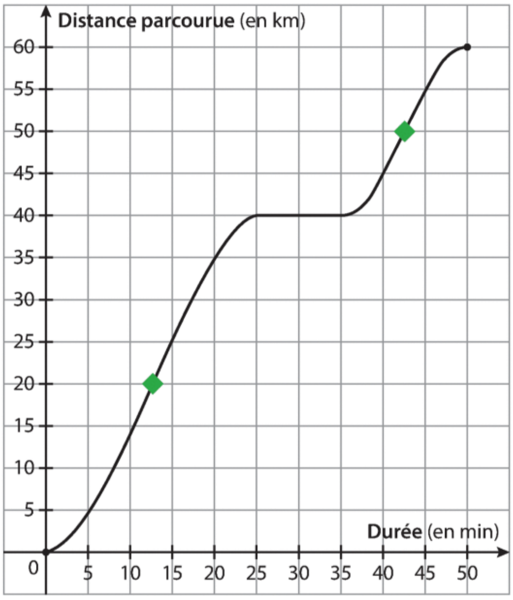
   Sol : $\dfrac{1}{18}$

2. Calcule le taux de variation instantané de la fonction $f(x)=3x^2+2x-1$ en $x=2$.

   Indique tes calculs.

   Sol : 14

3. On donne la courbe représentant la distance parcourue par une voiture en fonction du temps. La balise verte (petit losange sur le graphique) placée au 20^{e} km représente un radar mobile.



   (1) Quelle est la vitesse moyenne (en km/h) de l'automobiliste entre les kilomètres 20 et 50 ?

   Sol : 0,83 km/min = 50 km/h

   (2) La limitation de vitesse étant fixée à 90 km/h, l'automobiliste sera-t-il flashé au moment où il passe devant le radar (20^{e} km) ?

   Sol : On estime que le taux de variation instantané au niveau du radar est proche de $\dfrac{f(15)-f(10)}{15-10}=2,2$ km/min = 132 km/h

   ➔ L'automobiliste sera flashé !

4. Vérifie, par calculs, que le point d'abscisse 3 est un point à tangente verticale de la fonction $f(x)=\sqrt[5]{x-3}$.

   Sol : Le point d'abscisse 3 est un point de rebroussement car $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$ n'est pas réelle.

5. Vérifie, par calculs, que le point d'abscisse 4 est un point de rebroussement de la fonction $f(x)=\sqrt[3]{(2x-8)^2}$.

Sol : Le point d'abscisse 4 est un point de rebroussement car $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=+\infty$ (les dérivées sont infinies mais distinctes).

6. Sur sa piste d'envol, un avion se déplace à la vitesse $v(t)$ (en mètres par seconde) de $v(t)=\dfrac{t^2}{20}$ où $0\le t\le 60$.

Quelle est son accélération à la 20$^{\text{ème}}$ seconde ?

Sol : 2m/s²

7. Calcule la dérivée des fonctions suivantes et donne-la, si possible, sous forme simplifiée et/ou factorisée :

(1) $f(x)=5x+11$	$f'(x)=5$
(2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$	$f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$
(3) $f(x)=\left(x^2-1\right)^2$	$f'(x)=4x\left(x^2-1\right)$
(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$	$f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
(5) $f(x)=\left(x^4+1\right)\left(x^3-1\right)$	$f'(x)=7x^6-4x^3+3x^2$
(6) $f(x)=(2x-1)^3.(3x+2)^2$	$f'(x)=6(2x-1)^2(3x+2)(5x+1)$
(7) $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^3}}$	$f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
(8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}$	$f'(x)=\dfrac{-2.\cos 2x}{(1+\sin 2x)^2.\sqrt{\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}}$
(9) $f(x)=(3x-1)^4.\left(2-x^2\right)^3$	$f'(x)=6(3x-1)^3.\left(2-x^2\right)^2\left(-5x^2+x+4\right)$

(10) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-3}}$ $\qquad$ $f'(x)=\dfrac{-2}{3.\sqrt[3]{(2x-3)^4}}$

(11) $f(x)=\dfrac{3x+2}{\sqrt{2x-2}}$ $\qquad$ $f'(x)=\dfrac{3x+8}{\sqrt{(2x-2)^3}}$

(12) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 3x}$ $\qquad$ $f'(x)=\dfrac{6.\sin 3x}{\cos^3 3x}$

8. La courbe représentative de f est donnée ci-dessous. Que vaut

(1) $f(-4)$? $\qquad$ *Sol* : 3

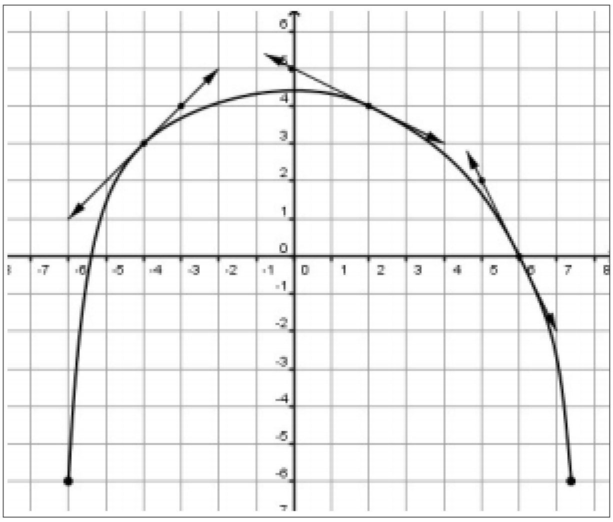
(2) $f'(-4)$? $\qquad$ *Sol* : 1

(3) $f(2)$? $\qquad$ *Sol* : 4

(4) $f'(2)$? $\qquad$ *Sol* : $-\dfrac{1}{2}$

(5) $f(6)$? $\qquad$ *Sol* : 0

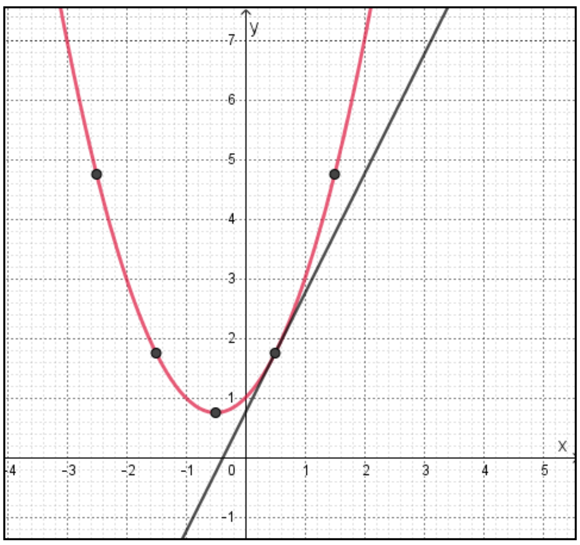
(6) $f'(6)$? $\qquad$ *Sol* : -2



9. On considère la fonction $f(x)=x^2+x+1$ et $a=\dfrac{1}{2}$. Détermine une équation réduite de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a.

Trace ensuite, dans un repère orthonormé, le graphe de f et sa tangente.

Sol : $T \equiv y=2x+\dfrac{3}{4}$



10. Soit $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$.

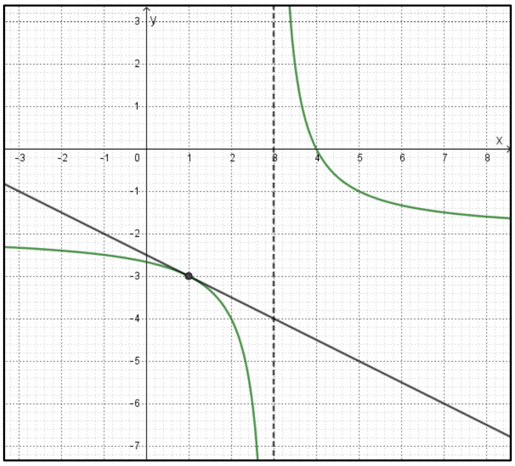
(1) Détermine une équation de la tangente au graphe de cette fonction en son point d'abscisse -1. *Sol* : $T \equiv y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{4}$

(2) Détermine une équation de toutes les tangentes à ce graphe ayant une pente égale à 4. *Sol* : $T_1 \equiv y=4x-7$ et $T_2 \equiv y=4x+1$

11. Détermine une équation réduite de la tangente au graphe de la fonction $f(x)=\dfrac{-2x+8}{x-3}$ en son point d'abscisse 1.

Représente ensuite la fonction, en indiquant les manipulations graphiques, et la tangente dans un seul repère orthonormé.

Sol : $T \equiv y=\dfrac{-1}{2}x-\dfrac{5}{2}$



Pour tracer *f*, on ajoute 3 à chaque abscisse du graphique de la fonction inverse, on multiplie ensuite chaque ordonnée par 2 et on soustrait 2 à chaque ordonnée.

12. Etablis le tableau de variation de la fonction $f(x)=\dfrac{-3x}{1+x^2}$.

Sol :

x		-1		1	
f'	+	0	-	0	+
f	↗	Max $\left[-1;\dfrac{3}{2}\right]$	↘	Min $\left(1;-\dfrac{3}{2}\right)$	↗

13. Détermine la valeur des réels a, b et c tels que le graphique de la fonction $f(x)=ax^2+bx+\dfrac{c}{x-1}$ admette une tangente horizontale au point d'abscisse -1 et une tangente parallèle à la droite $d \equiv y=-3x+2$ au point $(0;-6)$.

Sol : $a=\dfrac{3}{4}$, $b=3$ et $c=6$

14. Soit α et β deux réels, et f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}+\beta x$. Détermine les valeurs de α et β pour que la fonction f vérifie $f'(1)=1$ et $f'(-2)=0$.

Sol : $\alpha=-\dfrac{4}{3}$ et $\beta=-\dfrac{1}{3}$

15. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{2x}{1+x}$ et G_f est sa courbe représentative.

(1) Détermine les coordonnées des points de G_f en lesquels la tangente à G_f est parallèle à la droite d'équation $y=4x$.

Sol : $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1;2-2\sqrt{2}\right)$ et $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1;2+2\sqrt{2}\right)$

(2) Existe-t-il des tangentes à G_f passant par le point $(0;0)$? Justifie ta réponse.

Sol : Après calculs, on constate qu'il n'existe qu'une seule tangente. Son équation est $y=2x$.

16. Recherche les coordonnées des extremums et des points d'inflexion de la fonction $f(x)=x^4-5x^2+4$.

Sol : f possède un minimum en $\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{2};-\dfrac{9}{4}\right)$, un maximum en $(0;4)$ et un autre minimum en $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2};-\dfrac{9}{4}\right)$. La fonction possède deux points d'inflexion : $\left(\dfrac{\sqrt{30}}{6};0,53\right)$ et $\left(-\dfrac{\sqrt{30}}{6};0,53\right)$.

17. On considère la fonction $f(x) = x^3 - 2x + 2$.

(1) Utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour dénombrer le nombre de racines de *f*.

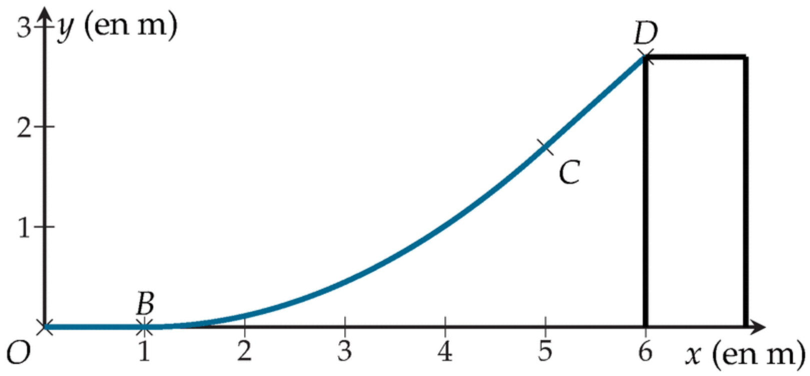
Sol : *f* possède une unique racine inférieure à -0,86.

(2) Utilise la méthode de Newton-Raphson pour donner une valeur approchée, à quatre décimales exactes après la virgule, d'une racine de *f*.

Sol : -1,7693

18. Une rampe de skateboard est modélisée de la manière suivante :

- une partie horizontale sur l'intervalle $[0;1]$;
- un arc de parabole sur l'intervalle $[1;5]$ représentant la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$;
- un segment de droite sur l'intervalle $[5;6]$ avec $C(5;1,8)$ et $D(6;2,7)$;
- le raccordement aux points *B* et *C* se fait sans cassure.



A l'aide des renseignements fournis, détermine les valeurs de *a*, *b* et *c*.

Sol : $a = \frac{9}{80}, b = -\frac{9}{40}$ et $c = \frac{9}{80}$

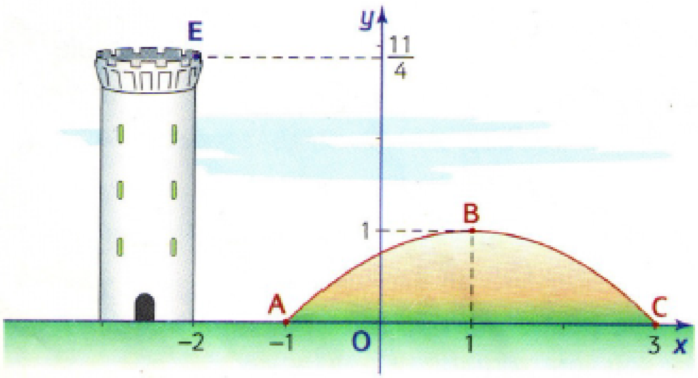
19. Lors du transport de l'électricité depuis un générateur vers un récepteur, les câbles électriques fonctionnent comme des résistances et dissipent par effet Joule une partie de l'énergie destinée au récepteur. La puissance perdue par effet Joule dépend de l'intensité du courant et de la résistance du câble.

Dans un réseau électrique donné dont l'intensité peut varier entre 1A et 5A, on a obtenu la formule suivante, reliant la puissance P dissipée, en watts et l'intensité I du courant, en ampères : $P(I) = 0{,}3I^2 - 2{,}4I + 9$.

Détermine la valeur de l'intensité du courant pour laquelle la puissance dissipée est minimale. Termine l'exercice en répondant par une phrase.

Sol : L'intensité du courant doit être de 4A pour que la puissance dissipée soit minimale.

20. Sur la figure ci-dessous, "l'arc" de la parabole ABC représente une colline, le sol est symbolisé par l'axe des abscisses. Un observateur est placé en E de coordonnées $\left(-2; \frac{11}{4}\right)$ dans le repère choisi.



Le but de l'exercice est de déterminer les points de la colline et ceux du sol (au-delà de la colline) qui ne sont pas visibles du point d'observation E.

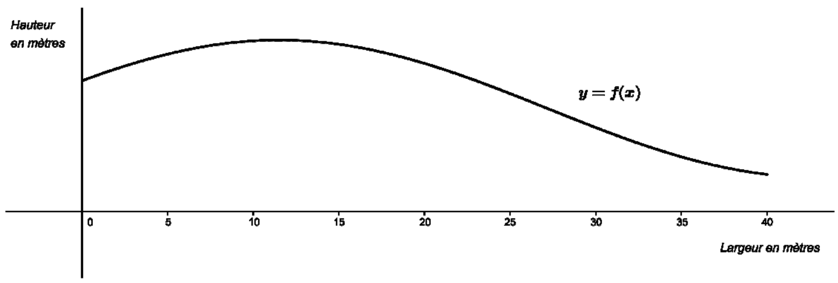
(1) On note f la fonction définie sur $[-1;3]$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Détermine les valeurs de a, b, c pour que "l'arc" ABC soit la représentation de f.

Sol : $a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{4}$

(2) Calcule les points qui ne sont pas visibles de E.

Sol : Parmi les tangentes à G_f , on cherche celle qui passe par E. Cette tangente coupe la parabole au point d'abscisse 2. On ne peut donc pas voir les points situés au-delà de 2 (plus grandes abscisses que 2).

21. Un étudiant en architecture a dessiné une façade en verre de 40 mètres de large en utilisant pour la partie supérieure le graphique de la fonction $f(x) = 4.\cos\left(\frac{x}{10} - 10\right) + 6$.



Quelle est la hauteur du point le plus élevé de cette façade ? *Sol* : 10 m

22. Effectue l'étude complète de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ (domaine, parité, intersections avec les axes, asymptotes, dérivée première et extremums, dérivée seconde et points d'inflexion, tableau récapitulatif et graphique).

Eléments de solution :

$dom\, f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ f est impaire

$(0;0) \in G_f$ $AV \equiv x = 2$ et $AV \equiv x = -2$, pas d'AH, $AO \equiv y = x$,

maximum en $\left(-2\sqrt{3};-5,2\right)$, minimum en $\left(2\sqrt{3};-5,2\right)$, point d'inflexion en $(0;0)$

23. L'évolution annuelle de la population P d'une harde de cerfs est modélisée par la fonction $P(t) = 4000 + 500.\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ où t est mesuré en années.

(1) A quel moment de l'année la population est-elle maximale ? Quelle est la population à ce moment-là ?

Sol : $t = \frac{1}{2}$ (au mois de juin) et la population est donnée par $P\left(\frac{1}{2}\right) = 4500$ cerfs

(2) Y a-t-il un minimum ? Si oui, quand ?

Sol : Il y a un minimum en $t = 0$ et $t = 1$, il s'agit du même mois, soit en janvier.

24. Sam Féchiet veut clôturer un petit enclos rectangulaire situé le long d'une rivière. Il ne dispose que de 100 mètres de clôture. Détermine les dimensions de l'enclos qui a l'aire la plus grande possible. (On ne met pas clôture le long de la rivière.)
    Sol : Le rectangle mesure 25 m sur 50 m.

25. Un petit zoo souhaite créer deux enclos, l'un circulaire, l'autre carré, en utilisant 500 mètres de clôture. Détermine les dimensions des deux enclos qui minimisent la surface totale des enclos.
    Sol : L'enclos circulaire a un rayon de 35,01 m et le côté du carré mesure 70,01 m.

GEOMETRIE VECTORIELLE PLANE

1. On donne les points $A(2;-3;1)$, $B(4;1;2)$, $C(-2;-6;4)$ et $D(3;3;-1)$.

   (1) Calcule les composantes des vecteurs

   a. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$ *Sol* : $(3;2;4)$

   b. $\overrightarrow{BA}+3.\overrightarrow{CB}$ *Sol* : $(16;17;-7)$

   (2) Calcule la norme du vecteur $\overrightarrow{CD}$. *Sol* : $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|=\sqrt{131}$

   (3) Calcule la norme du vecteur $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$. *Sol* : $\left\|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right\|=\sqrt{310}$

   (4) Détermine les coordonnées du point *E* de sorte que le quadrilatère $BCAE$ soit un parallélogramme.

   Sol : $E(8;4;-1)$

   (5) Détermine les coordonnées du point *F* de sorte que les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $2\overrightarrow{FC}$ soient égaux.

   Sol : $F\left(-\frac{2}{3};-5;3\right)$

   (6) Détermine les coordonnées du point *M*, milieu du segment $[BD]$.

   Sol : $M\left(1;-\frac{5}{2};3\right)$

   (7) Détermine la valeur de *a* pour que les vecteurs $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient parallèles si $R(3a-4;-4a;2a-1)$.

   Sol : $a=\frac{4}{3}$

   (8) Détermine les coordonnées du centre de gravité *G* du triangle *ACD*.

   Sol : $G\left(1;-2;\frac{4}{3}\right)$

   (9) Détermine les coordonnées du centre de gravité *G’* du tétraèdre *ABCD*.

   Sol : $G'\left(\frac{7}{4};-\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$

2. On donne les points $A(-2;8;9)$, $B(-4;4;5)$, $C(0;4;-3)$, $D(-8;6;7)$ et $E(1;-2;3)$.

   I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

   (1) Les points *A*, *B* et *C* sont-ils alignés ? Justifie ta réponse.

   Sol : *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas parallèles

   (2) Calcule les coordonnées du point *L* tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

   Sol : $L(-3;4;3)$

   (3) Montre que les points *I*, *J*, *L* et *E* sont coplanaires.

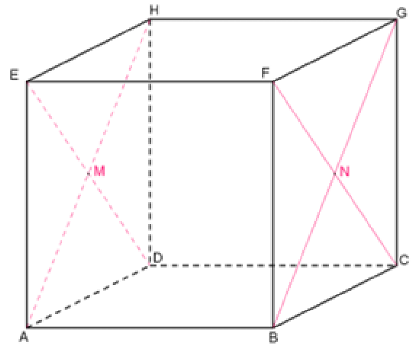
   Sol : Les points *I*, *J*, *L* et *E* sont coplanaires car $\overrightarrow{IJ} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{IL} - \frac{1}{4}\overrightarrow{IE}$

3. Le vecteur $\vec{w}(-1;-15;-19)$ peut-il s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}(4;-6;2)$ et $\vec{v}(-1;-4;6)$? Justifie ta réponse.

   Sol : Oui car $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} + 3\vec{v}$

GEOMETRIE SYNTHETIQUE ET ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

Partie 1



1. Vrai ou faux ?

   (1) *AB* et *EH* sont dans le même plan.

   (2) *AH* et *DG* sont sécantes.

   (3) *AN* et *EN* sont dans le même plan.

   (4) *AB* et *GF* sont parallèles.

   (5) *DG* et *EM* sont sécantes.

   (6) *BH* et *NA* sont coplanaires.

   Sol : (1) Faux (4) Faux

   (2) Faux (5) Vrai

   (3) Vrai (6) Faux

2. Détermine la position des droites et des plans qui suivent.

   Si les éléments sont sécants, donne leur point/droite d'intersection.

   (1) *AJB* et *DCJ*

   (2) *AB* et *GHD*

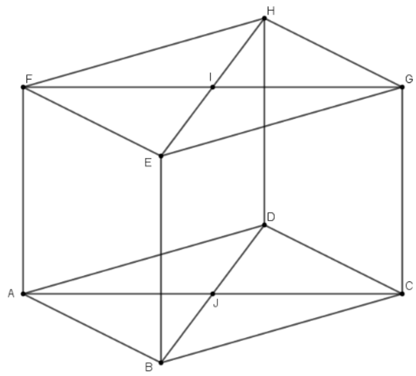
   (3) *FI* et *HD*

   (4) *BD* et *EI*

   (5) *FIJ* et *HDC*

   (6) *BD* et *CDH*

   (7) *ADC* et *EGI*

   Sol : (1) parallèles confondus

   (2) parallèles distincts

   (3) gauches

   (4) parallèles distinctes

   (5) sécants en *CG*

   (6) sécants en *D*

   (7) parallèles distincts

On donne les points $A(0;1;1)$, $B(1;0;1)$, $C(1;1;0)$, $D(1;1;2)$ et $E(-1;4;2)$ ainsi que $\pi_1 \equiv 2x-y+3z-1=0$, $\pi_2 \equiv x-y-z+2=0$, $\pi_3 \equiv x-3y+4z-2=0$ et $\pi_4 \equiv x-y+z+1=0$.

d_1 a pour vecteur directeur $\vec{v}(1;0;1)$ et contient le point $(1;-1;0)$.

d_2 a pour vecteur directeur $\vec{u}(1;0;-1)$ et contient le point $(0;2;1)$.

d_3 a pour vecteur directeur $(1;-2;-1)$ et contient le point $(0;-2;1)$.

d_4 a pour vecteur directeur $(1;2;3)$ et contient le point $(-2;0;1)$.

d_5 a pour vecteur directeur $(-1;0;2)$ et contient le point $(1;2;-1)$.

1. (1) Détermine des équations paramétriques et cartésienne du plan π_5 contenant les points *A*, *B* et *C*.

   $$Sol : \pi_5 \equiv \begin{cases} x = k+l \\ y = -k+1 \\ z = -l+1 \end{cases} \quad \text{et } \pi_5 \equiv x+y+z-2=0$$

   (2) Détermine des équations paramétriques et cartésienne de la droite *AC*.

   $$Sol : AC \equiv \begin{cases} x = k \\ y = 1 \\ z = -k+1 \end{cases}$$

   (3) Détermine une équation cartésienne du plan π_6 parallèle à π_1 et passant par le point *D*.

   $Sol : \pi_6 \equiv 2x-y+3z-7=0$

   (4) Détermine une équation cartésienne de π_7 perpendiculaire à d_2 et passant par *C*.

   $Sol : \pi_7 \equiv x-z-1=0$

2. (1) Détermine une équation cartésienne de la droite d à l'intersection des plans π_1 et π_2 ; précise un vecteur directeur et un point de cette droite.

Sol : $d \equiv \frac{x-3}{-4} = \frac{y-1}{\frac{1}{3}} = z$ vecteur directeur : $\vec{u}\left(-4;\frac{1}{3};0\right)$ point : $P(3;1;0)$

(2) Les plans π_1 et π_2 sont-ils perpendiculaires ?

Sol : Oui car $\overrightarrow{n_1} \odot \overrightarrow{n_2} = 0$

(3) Détermine des équations paramétriques et cartésiennes de la droite perpendiculaire à π_1 et contenant le point D.

Sol : $\begin{cases} x = 2k+1 \\ y = -k+1 \\ z = 3k+2 \end{cases}$ et $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$

3. La droite d_1 est-elle parallèle au plan π_4 ? d_2 est-elle parallèle à π_4 ? Sinon, détermine les coordonnées du point d'intersection.

Sol : d_1 perce π_4 au point $I\left(\frac{3}{5};-1;-\frac{2}{5}\right)$ d_2 est parallèle à π_4

4. d_3 et d_4 sont-elles…
   a. orthogonales ? *non*
   b. parallèles ? *non*
   c. gauches ? *non*
   d. sécantes ? Si oui, détermine leur point d'intersection. *Oui*, $I\left(-\frac{3}{2};1;\frac{5}{2}\right)$

5. (1) Calcule la distance du point E au plan π_4. *Sol* : $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

   (2) Calcule la distance de E à la droite $d \equiv \begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$. *Sol* : $\frac{2\sqrt{30}}{3}$

p

6. Détermine des équations paramétriques de la perpendiculaire commune aux droites d_4 et d_5. Précise les points de contact de cette droite avec d_4 et d_5.

$$d \equiv \begin{cases} x = -4k - \frac{4}{3} \\ y = 5k + \frac{4}{3} \\ z = -2k + 3 \end{cases} \qquad d \cap d_4 = \left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; 3\right) \qquad d \cap d_5 = \left(-\frac{28}{15}; 2; \frac{41}{15}\right)$$

Partie 3

1. Résous les systèmes suivants et donne une interprétation géométrique complète et précise des 3 plans que représentent les 3 équations.

$$(1) \begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ -11x + 6y + 5z = 0 \end{cases}$$

$Sol: \ S = \{(\lambda; \lambda; \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Les 3 plans se coupent suivant une droite commune : $d \equiv x = y = z$

$$(2) \begin{cases} x + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 4x + 2z = 1 \end{cases}$$

$Sol: \ S = \left\{\left(\frac{1}{10}; -\frac{1}{10}; \frac{3}{10}\right)\right\}$

Les 3 plans se coupent au point $I\left(\frac{1}{10}; -\frac{1}{10}; \frac{3}{10}\right)$

$$(3) \begin{cases} 4x - 2y + 6z + 5 = 0 \\ 2x + y - 3z + 7 = 0 \\ 6x - 3y + 9z - 1 = 0 \end{cases}$$

$Sol: \ S = \varnothing$

Deux plans sont parallèles et le troisième plan les coupe.

(4) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x-2y-3z=-6 \\ x+4y+4z=3 \end{cases}$

$Sol : S=\left\{\left(\frac{-3}{4};\frac{19}{8};\frac{-7}{2}\right)\right\}$

Les 3 plans se coupent au point $I\left(\frac{-3}{4};\frac{19}{8};\frac{-7}{2}\right)$

(5) $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 3x+3y=1 \\ x+y-2z=4 \end{cases}$

$Sol :\ S=\varnothing$

Les 3 plans se coupent 2 à 2 suivant des droites parallèles.