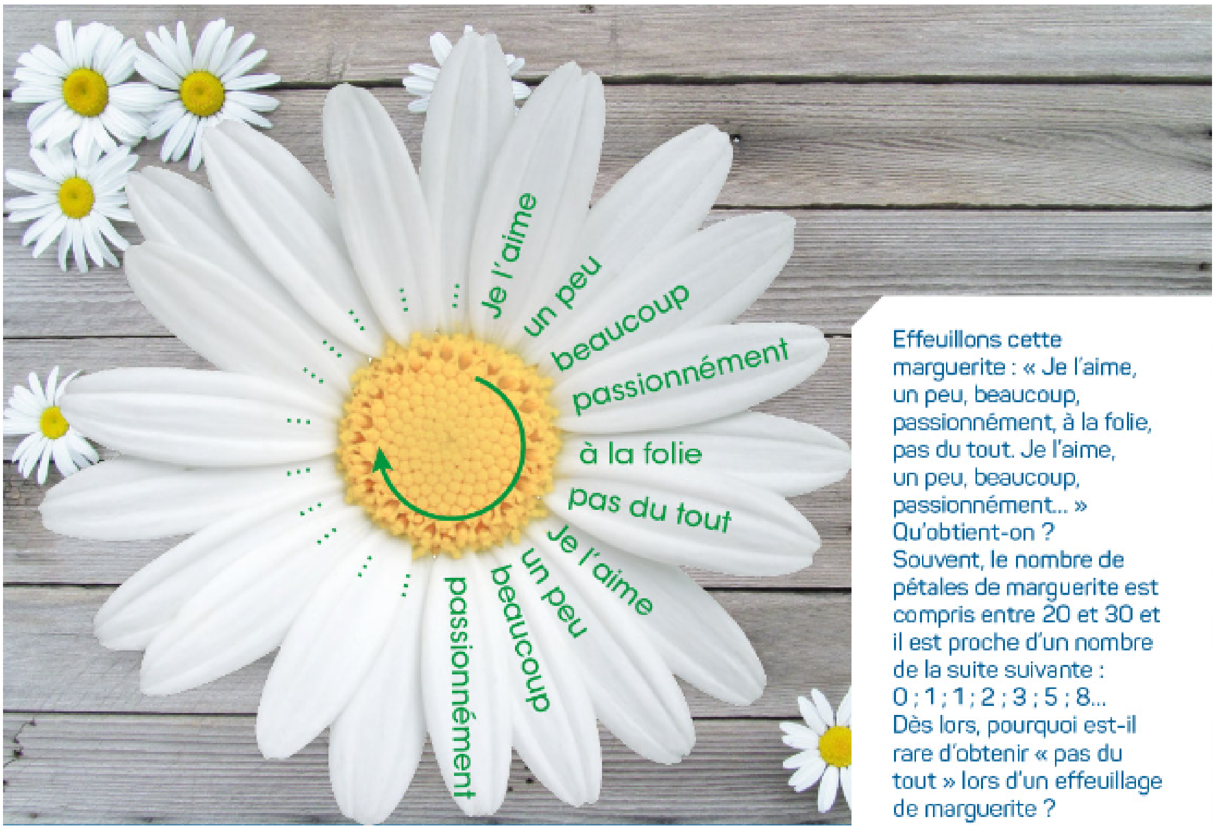
UAA 2 :

Les suites



L'élève doit SAVOIR :

1. Définir "suite numérique".
2. Expliquer ce qu'est une suite définie par récurrence.
3. Définir "suite arithmétique" et "suite géométrique".
4. Donner les formules liées aux suites arithmétiques et géométriques.
5. Démontrer la formule donnant la somme des *n* premiers termes d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique.
6. Expliquer ce qu'est une suite convergente ou divergente.
7. Déterminer la limite d'une suite arithmétique ou géométrique en fonction de la valeur de la raison et/ou du premier terme.
8. Donner les définitions formelles de limite d'une suite et expliquer avec tes mots ce que signifient ces « phrases mathématiques ».
9. Donner les formules de placement à intérêts simples ou composés.
10. Expliquer ce qu'est une "annuité", donner la formule qui y est liée et expliquer ce que représente nt les symboles T_1 et n.
11. Expliquer la différence entre un placement à intérêts simples et un placement à intérêts composés.

L'élève doit ETRE CAPABLE DE :

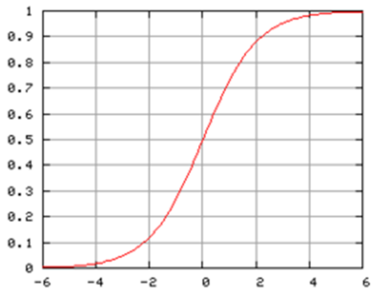
1. Déterminer les termes d'une suite en fonction de son terme général.
2. Utiliser/Etablir une relation de récurrence.
3. Déterminer la nature d'une suite (arithmétique ou géométrique).
4. Appliquer les formules liées aux suites arithmétiques et géométriques dans différents contextes.
5. Résoudre un problème faisant intervenir des suites.
6. Représenter une suite.
7. Déterminer la limite d'une suite.
8. Calculer le taux, l'intérêt ou la durée d'un placement à intérêts simples ou composés.
9. Etablir le tableau d'amortissement d'un emprunt. Calculer une annuité.

La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, chez Archimède, spécialiste des procédés illimités d'approximation pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Egypte vers 1700 av. J.-C. et plus récemment au 1^er^ siècle après J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie.

On retrouvera cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du 17^e^ siècle) avec la méthode des indivisibles (Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval). C'est ainsi que l'on voit Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis, s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques.

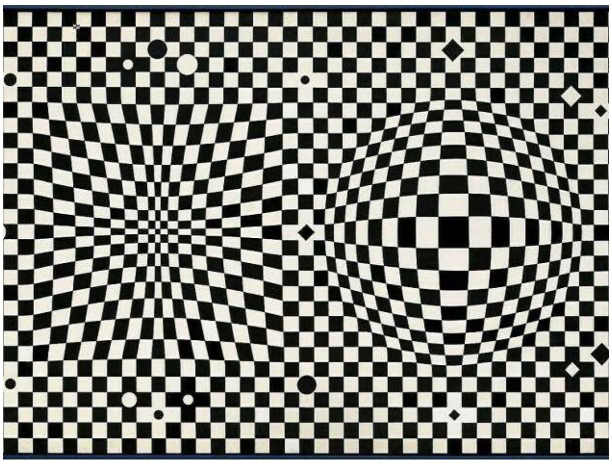
De nos jours, les suites sont l'outil privilégié pour la modélisation des évolutions de phénomènes « discrets » :

- croissance d'une population d'animaux (modèle de Verhulst par exemple, mathématicien belge, 1804-1849)



- présence de médicaments dans le sang
- propagation d'une épidémie.

Dans les arts également, la reproduction « à l'infini » de phénomènes est une source d'inspirations par exemple pour l'artiste français d'origine hongroise, Victor Vasarely (1906-1997).

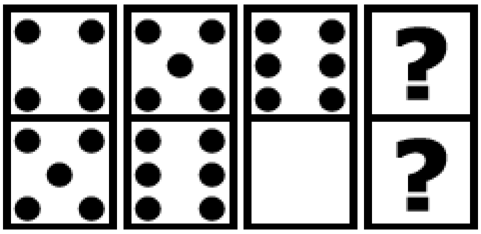


A. Exemples et vocabulaire

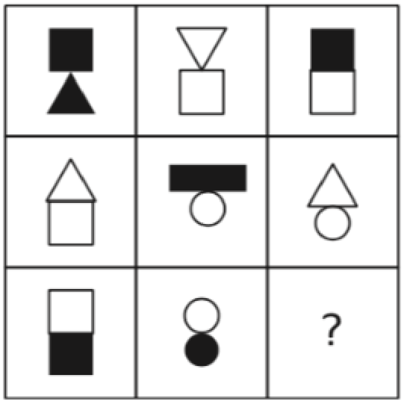
1. Introduction aux suites

Complète chaque suite logique :

1°



2°



3° L ; N ; P ; R ; … ; … ; …

4° 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; … ; … ; …

5° 24 ; 12 ; 6 ; 3 ; … ; … ; …

6° $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4}$; … ; … ; …

7° 6 ; 1 ; 8 ; 3 ; 10 ; … ; … ; …

8° 6 ; 6 ; 10 ; 5 ; 14 ; 4 ; … ; … ; …

9° $0 ; \frac{1}{2} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{4}$; … ; … ; …

10° 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 12 ; … ; … ; …

11° 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; … ; … ; …

12° 10 ; 9 ; 7 ; 4 ; … ; … ; …

2. Vocabulaire

VOCABULAIRE SUR LES SUITES ET DETERMINATION D'UNE SUITE

https://bit.ly/3ztJfTs

Ces douze exemples (exceptés les 3 premiers) sont des *suites numériques.*

Une suite numérique est une liste ordonnée et infinie de nombres.

Chaque suite est une **fonction** qui, à chaque numéro de place, fait correspondre le réel situé à cette place.

Les nombres qui constituent la suite sont appelés "**termes**".

Pour faciliter la notation, on utilise une *notation indicée* : chaque terme est noté par une lettre (généralement u) affectée d'un indice (généralement n) qui indique la position de ce terme dans la suite.

Ce naturel n, donnant la position d'un terme dans la suite, est appelé le **rang** de ce terme.

Ainsi, le premier terme est noté u_1, le deuxième terme est noté u_2 et ainsi de suite.

Le $n^{\text{ème}}$ terme est noté u_n.

La suite est alors notée $(u_n)_{n \in IN_0}$.

Le terme précédent u_n est noté ………. et celui qui suit u_n est noté ……….

Le saviez-vous ?

En 1926, le mathématicien italien Vito Volterra propose un modèle où interviennent des suites pour décrire l'évolution de deux populations : les requins (les prédateurs) et les sardines (les proies).

B. Détermination d'une suite

Une suite (u_n) est déterminée lorsque, pour chaque indice n , on peut déterminer la valeur du n ème terme.

De plus, on peut souvent définir une suite numérique par son **terme général** : chaque terme de la suite est exprimé par une formule explicite qui exprime chaque terme u_n en fonction de l'indice n.

Par exemple, dans la suite 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; …, $u_n = ...$

Exemple : Considérons la suite $(u_n)_{n \in IN_0}$ définie par son terme général $u_n = 2n - 2$.

Déterminons les trois premiers termes.

$u_1 = ...$

$u_2 = ...$

$u_3 = ...$

Exercice : Reprenons deux exemples du point A. Pour chacun d'eux, détermine le terme général.

6° $1 \; ; \; \frac{1}{2} \; ; \; \frac{1}{3} \; ; \; \frac{1}{4} \; ; \; \ldots \; ; \; \ldots \; ; \; \ldots$

$u_n = ...$

9° $0 \; ; \; \frac{1}{2} \; ; \; \frac{2}{3} \; ; \; \frac{3}{4} \; ; \; \ldots \; ; \; \ldots \; ; \; \ldots$

$u_n = ...$

Il est parfois difficile de déterminer le terme général d'une suite (voir exemple 4°). On définit alors la suite **par récurrence** : chaque terme de la suite, à partir d'un certain rang, est exprimé en fonction d'un (ou de plusieurs termes) qui le précède(nt).

Dans l'exemple 4°, 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; … ; … ; …

$$\begin{cases} u_1 = ... \\ u_n = u_{n-1} ...... \end{cases}$$

Dans l'exemple suivant : 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; …, $\begin{cases} u_1 = ... \\ u_n = u_{n-1} ...... \end{cases}$

Exercices :

https://bit.ly/3u3Aqhc

1. Soit la suite déterminée par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3n-2 \end{cases}$.

   Détermine les quatre premiers termes de cette suite.

2. Soit la suite (u_n) déterminée par récurrence par $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = u_{n-1}.(1-u_{n-1}) \end{cases}$.

   (1) Détermine les cinq premiers termes de cette suite.

   (2) Exprime le terme général en fonction de n dans le cas où le premier terme de cette suite est 0.

3. Soit la suite de nombres 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; …

   Donne la formule de récurrence de cette suite et le terme général.

4. Soit la suite déterminée par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_n = 6.u_{n-1} - 5.u_{n-2} \end{cases}$.

   Calcule u_3, u_4 et u_5.

5. On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_n = \dfrac{n+u_{n-1}}{2} \end{cases}$.

   (1) Détermine les cinq premiers termes de cette suite.

   (2) Donne le terme général.

6. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -3n+5$.

   Donne l'expression en fonction de *n* de : $u_{n+1}, u_n+1, u_{n+2}, u_{2n}, u_{n^2}, u_{2n+1}$.

7. Avec des bâtons identiques, on réalise les figures représentées ci-dessous :

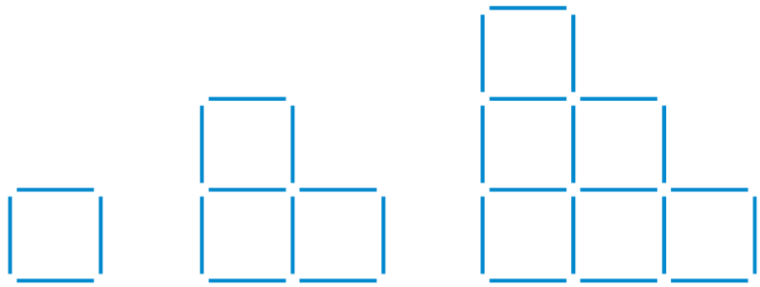


Figure 1 Figure 2 Figure 3

(1) On note b_n le nombre de bâtons nécessaires pour construire la figure n, où n est un naturel non nul.

Recherche b_5.

(2) Recherche une expression de b_{n+1} en fonction de b_n.

8. Avec des jetons, on construit une succession de figures. Voici les quatre premières :

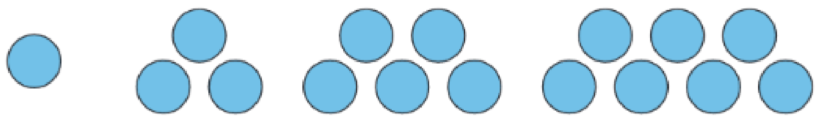


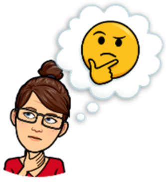
Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4

Modélise, à l'aide d'une suite récurrente, le nombre de jetons de chaque figure.

9. *GOOGLE FORM* : « Suites numériques »

https://forms.gle/viv7pPJeecKFiimy5

__Pour chercher :__



1. La suite (v_n) vérifie, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $v_{n+1} = v_n + n - 3$.

   Prouve que, quel que soit le terme v_1, on a $v_3 = v_4$, $v_2 = v_5$ et $v_1 = v_6$.

2. Virginie s'intéresse à une suite de nombres qu'elle crée en utilisant la formule suivante : $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{m+n} = a_m + a_n + m.n \end{cases}$.

   Combien vaut a_{100} ?

3. Suite d'Aronson

   Version anglaise :

   « *t* is *t*he firs*t*, four*t*h, eleven*t*h, …, le*tt*er of *t*his sen*t*ence. »

   1, 4, 11, 16, 24, 29, 33, 35, 39,…

   Version française :

   « *m* est la pre*m*ière, la dixiè*m*e, la vingt-deuxiè*m*e, …, lettre de cette phrase. »

   1, 10, 22, 37, 53, …

   Détermine les dix termes suivants.

C. Suites arithmétiques

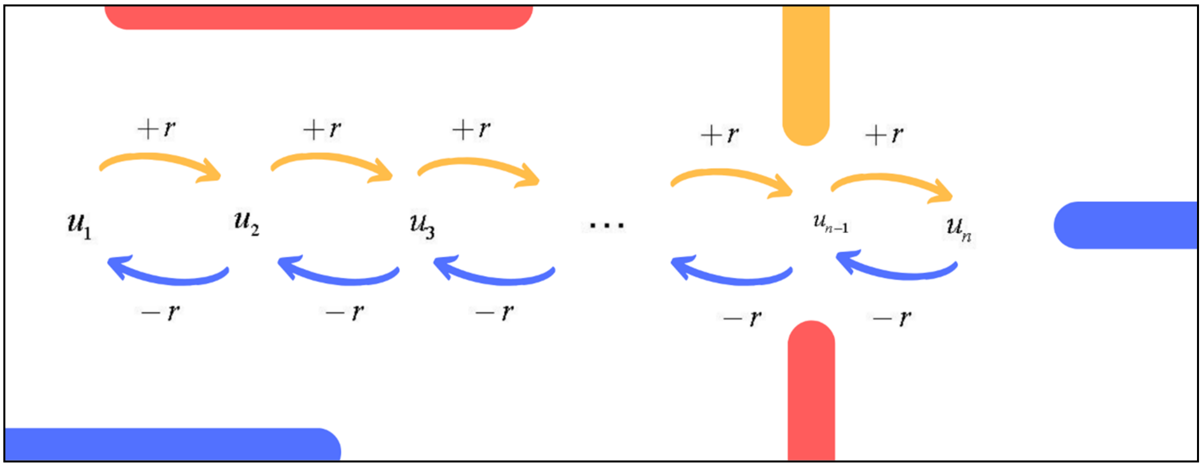
1. Vocabulaire

Une suite (u_n) est une **<u>suite arithmétique</u>** lorsqu'il existe un réel r non nul tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}_0,\ u_n = u_{n-1} + r.$$

Autrement dit, une suite est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est constante. Chacun de ses termes, à partir du deuxième, est égal à la ***somme*** du terme précédent et d'un réel *r* non nul constant.

Le réel r est appelé **<u>raison</u>** de la suite.



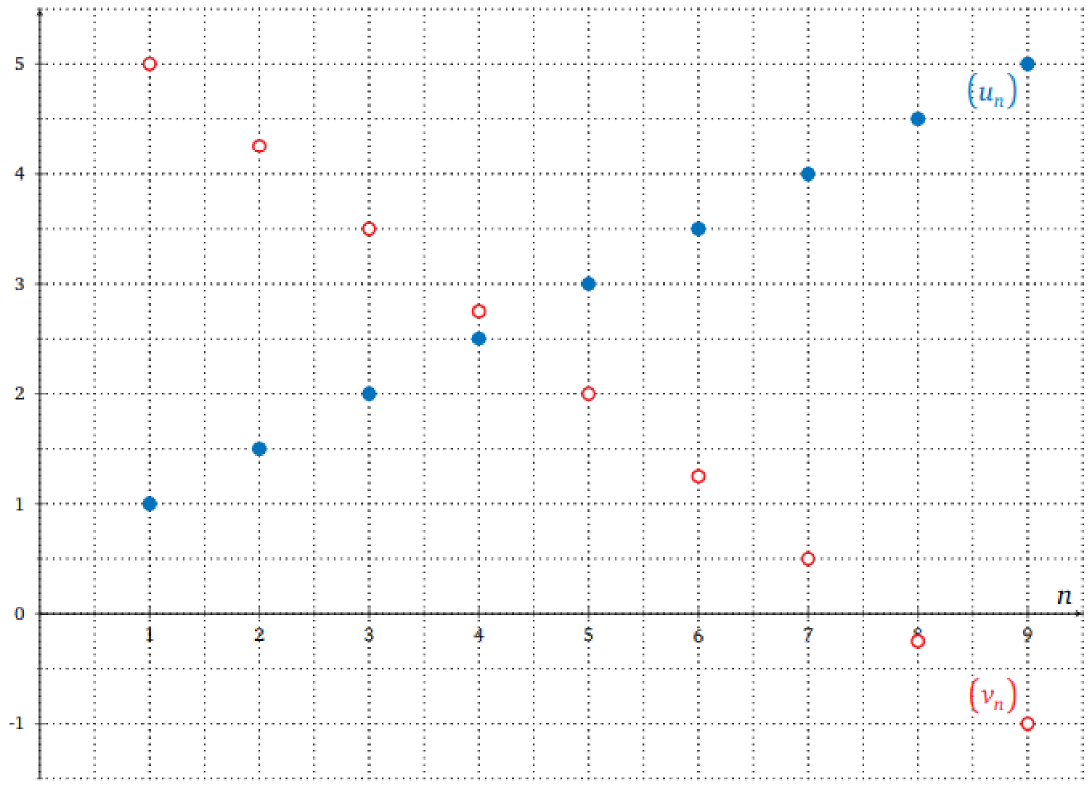
Si r est positif, la suite est croissante, si r est négatif, la suite est décroissante.

2. Propriétés

(1) Comment reconnaître qu'une suite est arithmétique ?

Graphiquement, une suite arithmétique est représentée par un ensemble de points isolés et alignés.

Exemples :



La suite (u_n) est une suite arithmétique...................................... de raison $r =$......

La suite (v_n) est une suite arithmétique...................................... de raison $r =$......

Algébriquement, pour montrer qu'une suite est arithmétique, lorsqu'on connaît le terme général de la suite, on montre que la différence entre deux termes consécutifs est un réel : $u_{n+1} - u_n = \text{constante}$. De plus, cette constante est la raison de la suite arithmétique.

Note : De manière équivalente, on peut montrer que $u_n - u_{n-1} =$ constante.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = 3n - 7$ est arithmétique car...

Exercices :

https://bit.ly/3QGsXyP

1. Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Si oui, donne leur raison.

   (1) 8 ; 6 ; 4 ; 2 ; …

   (2) 1 ; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{7}$; …

   (3) $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{3}{2}$; …

2. Montre rigoureusement que la suite (u_n) définie par $u_n = 5n + 3$ est arithmétique.

(2) Comment déterminer le terme général u_n d'une suite arithmétique dont on connaît le premier terme u_1 et la raison *r* ?

Dans une suite arithmétique, le terme général est donné par la formule :

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1).r}$$

Exercice : Calcule le 8ème terme d'une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $r = -4$.

(3) Comment calculer la somme S_n des n premiers termes d'une suite arithmétique ?

D'où $\boxed{S_n = \quad\quad\quad\quad\quad\quad}$

SOMME DES N PREMIERS TERMES D'UNE SUITE ARITHMETIQUE

https://bit.ly/3zBvQZt

<u>Exemple :</u> Soit la suite arithmétique $-5;-1;3;7;...$

Calculons la somme des 10 premiers termes.

D. Suites géométriques

1. Le triangle magique

Etape 1 : Trace un triangle quelconque le plus grand possible sur une feuille A4.

Etape 2 : Repère le milieu de chaque côté du triangle.
Trace les segments reliant ces milieux.
Colorie le triangle central obtenu.
Relève le nombre de triangles non coloriés.

Etape 3 : Pour chaque triangle non colorié, répète les consignes de l'étape 2.

Quel est le nombre de triangles non coloriés si on répète 10 fois l'étape 2 ?

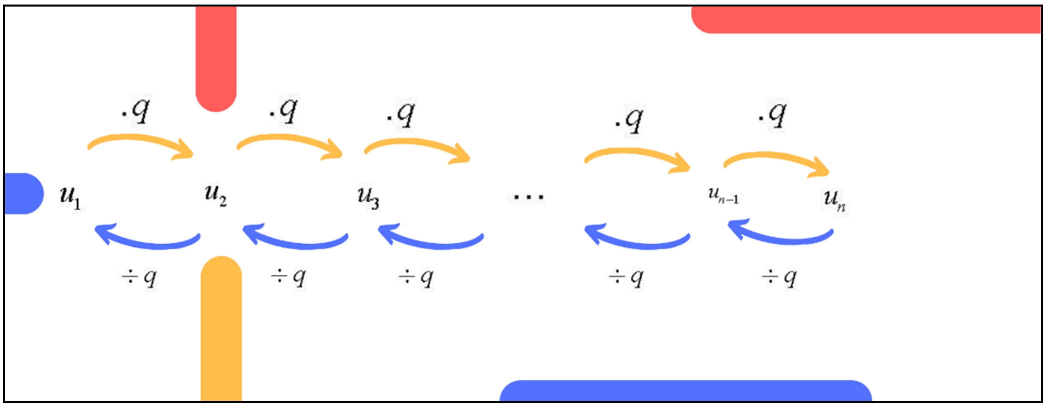
2. Vocabulaire

Une suite (u_n) est une **suite géométrique** lorsqu'il existe un réel q $(q \neq 0$ et $q \neq 1)$ tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}_0,\ u_n = u_{n-1}.q\,.$$

Autrement dit, une suite est géométrique si le rapport entre deux termes consécutifs est constant. Chacun de ses termes, à partir du deuxième, est le ***produit*** du terme précédent par un réel constant non nul et différent de 1.

Le réel q est appelé **raison** de la suite.



Remarque : On se limitera souvent aux suites de raison strictement positive.

3. Propriétés

(1) Comment reconnaître qu'une suite est géométrique ?

Graphiquement, une suite géométrique de raison positive est représentée par un ensemble de points isolés. L'allure de la courbe varie en fonction du signe du premier terme et de la valeur de la raison.

Exemple : Représentons le graphique des suites géométriques

- (u_n) de premier terme 2 et de raison $q = 1,2$
- (v_n) de premier terme 6 et de raison $q = 0,6$
- (s_n) de premier terme -2 et de raison $q = 1,2$
- (t_n) de premier terme -6 et de raison $q = 0,6$

Conclusion :

	$q < 0$	$0 < q < 1$	$q > 1$
$u_1 > 0$			
$u_1 < 0$			

Algébriquement, pour montrer qu'une suite est géométrique, lorsqu'on connaît le terme général de la suite, on montre que le quotient de deux termes consécutifs est un réel : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{constante}$. De plus, cette constante est la raison de la suite géométrique.

Note : De manière équivalente, on peut montrer que $\frac{u_n}{u_{n-1}} =$ constante.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = 4 \times 3^n$ est géométrique car…

(2) Comment déterminer le terme général u_n d'une suite géométrique dont on connaît le premier terme u_1 et la raison *q* ?

Dans une suite géométrique, le terme général est donné par la formule :

$$\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$$

Exercice : Calcule le 8ème terme d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $q = 4$.

(3) Comment calculer la somme S_n des n premiers termes d'une suite géométrique ?

D'où $\boxed{S_n = \qquad\qquad}$

SOMME DES N PREMIERS TERMES D'UNE SUITE GEOMETRIQUE

https://www.youtube.com/watch?v=2IMze0jr6T8

<u>Exemple :</u> Soit la suite 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; …

Calculons la somme des 9 premiers termes de cette suite géométrique.

E. Exercices

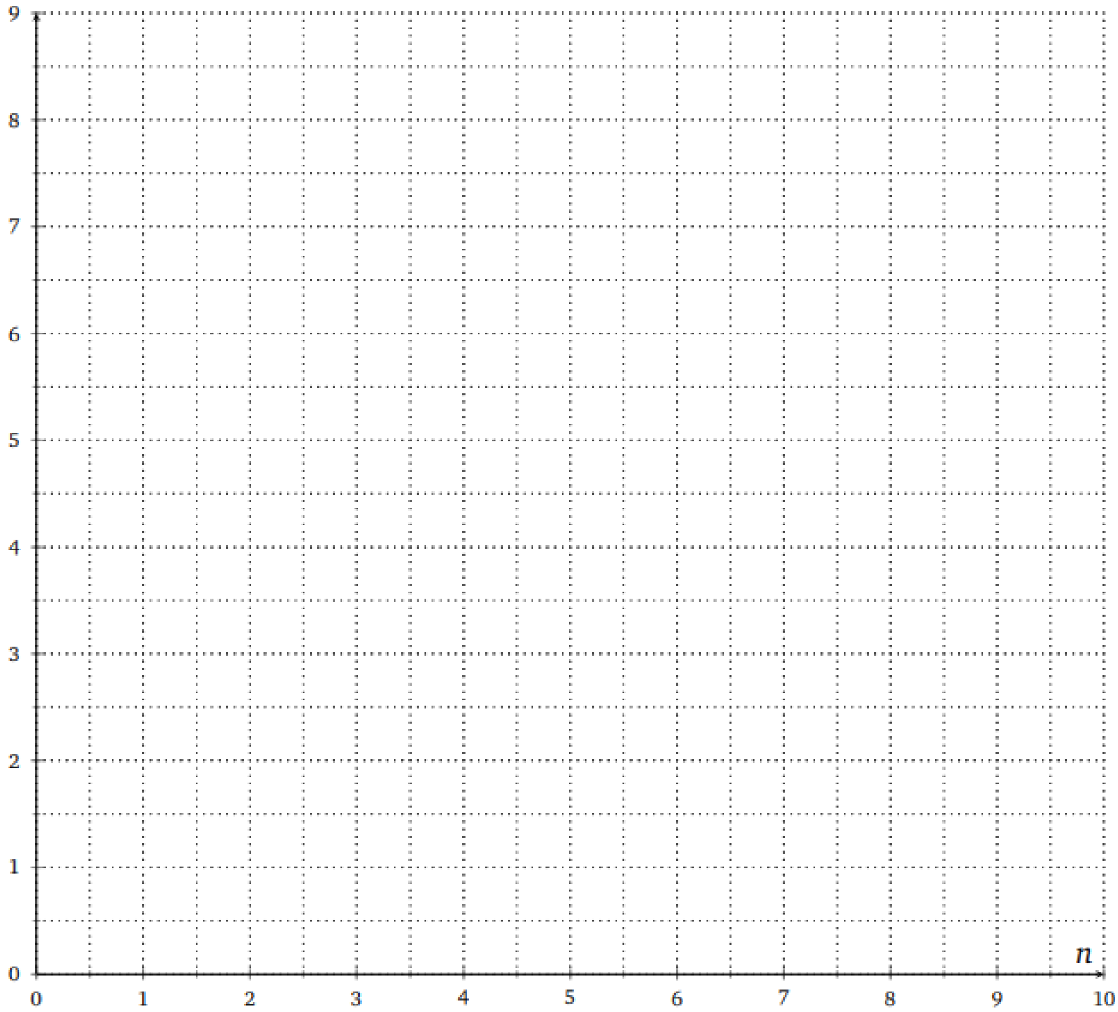
https://bit.ly/3PtOxp0

Utilise la mémoire de la calculatrice !

1. Représente, dans le repère ci-dessous, les six premiers termes

   (1) de la suite arithmétique (u_n) de premier terme 9 et de raison $-\frac{1}{4}$

   (2) de la suite géométrique (v_n) de premier terme 8 et de raison $\frac{1}{2}$



2. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 17$ et de raison $r = 4$.

   Calcule u_{20} et S_{20}.

3. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_1 = -7$ et de raison $q = 3$.

   Calcule u_{10} et S_5.

4. On considère la suite (u_n) définie par son terme général : $u_n = 5 - 2n$.

   (1) Montre <u>rigoureusement</u> que (u_n) est une suite arithmétique dont tu préciseras la raison.

   (2) Que vaut u_{100} ?

   (3) Calcule la somme $S = u_1 + u_2 + ... + u_{100}$.

5. On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

   (1) Montre <u>rigoureusement</u> que (u_n) est une suite arithmétique dont tu préciseras la raison.

   (2) Que vaut u_{100} ?

6. (u_n) est une suite arithmétique, calcule u_1 sachant que $u_{31} = 17$ et $r = 2$.

7. Soit (u_n) une suite géométrique, calcule u_1 si $u_5 = 512$ et $q = 2$.

8. (u_n) est une suite arithmétique, calcule u_1 et *r* sachant que $u_7 = 25$ et $u_{12} = 45$.

9. Calcule la somme $S = 1 + 2 + 3 + ... + 2014 + 2015$.

Le saviez-vous ?

Carl Friedrich Gauss, mathématicien allemand (1777-1855) aurait calculé très rapidement, à l'âge de 9 ans, la somme des nombres entiers de 1 à 100, impressionnant ainsi son maître et ses camarades de classe !

10. La somme de quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique est 35 et le quatrième vaut quatre fois le premier. Quels sont ces quatre nombres ?

11. Soit (u_n) une suite géométrique, calcule le premier terme et la raison dans les situations suivantes :
    (1) $u_6 = 232328$ et $u_{10} = 30233088$
    (2) $u_2 = 392$ et $u_5 = 49$
    (3) $u_4 = 64000$ et $u_6 = 32768$

12. Soit la suite 1 ; 5 ; 9 ; 13 ; … Quelle est la place occupée par 65 ?

13. Calcule $12+15+18+...+72$.

14. Détermine tous les réels *y* pour que les trois réels 3, $y-1$ et $2y-1$ soient trois nombres consécutifs d'une suite géométrique.

15. Détermine combien il faut totaliser de termes successifs de la suite arithmétique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{3}$ pour que leur somme soit égale à 48.

16. Détermine trois nombres en progression arithmétique tels que leur somme soit 27 et la somme de leurs carrés soit 261.

17. Détermine 7 nombres impairs consécutifs dont la somme est 7^3.

18. Calcule $S = 1+2+2^2+2^3+...+2^{10}$.

19. Montre <u>rigoureusement</u> que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3^n}{2^{2n+1}}$ est une suite géométrique.

20. Montre <u>rigoureusement</u> que la suite (v_n) est géométrique sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $v_n = u_n - 2$ et $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_n = \dfrac{2u_{n-1} + 6}{5} \end{cases}$.

21. Lors d'une épidémie, un institut médical a constaté que le premier jour de recensement du nombre de patients malades, 3500 personnes étaient atteintes, puis que le nombre de malades augmentait de 10 % par semaine. On appelle u_1 le nombre de malades le premier jour, u_2 celui au bout d'une semaine et u_n celui au bout de $n-1$ semaines.
    (1) Précise la valeur de u_1 puis calcule u_2 et u_3.
    (2) Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?
    (3) Déduis-en la nature de la suite (u_n).
    (4) Calcule le nombre de malades au bout de 12 semaines.

22. A 8 heures, on injecte à un malade 5 cl d'un analgésique. Le corps élimine naturellement 0,4 cl de produit par heure. Il faut refaire une injection quand il reste moins de 1,5 cl d'analgésique. Quand faudra-t-il effectuer une nouvelle injection ?

23. Cette année, la production d'un ostréiculteur est de 20 tonnes. Il prévoit une augmentation de 2 tonnes par an.

On note P_n la production prévisible totale, exprimée en tonnes, obtenue au bout de *n* années. Ainsi $P_1 = 20$.

Détermine au bout de combien d'années la production totale devrait être supérieure à 200 tonnes.

24. L'entreprise Eurodist loue un entrepôt de 15 000 m³.

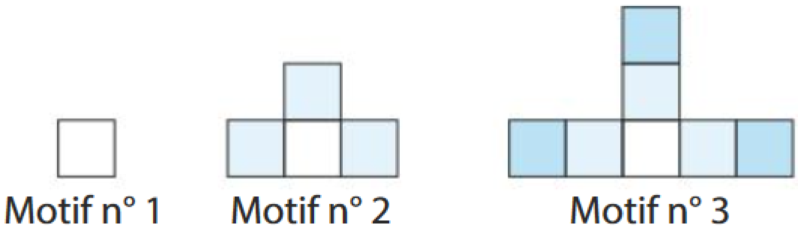
Le 1er janvier 2011, le volume de matériel stocké était de 2500 m³. Depuis, il a augmenté régulièrement chaque année de 15 %.

(1) Quel était, en m³, le volume de matériel stocké le 1er janvier 2012 ? le 1er janvier 2013 ?

(2) Déduis-en la nature de la suite formée des volumes stockés. Quelle en est la raison ?

(3) L'entrepôt loué sera-t-il assez grand pour stocker le matériel en 2021 ? Justifie ta réponse.

25. On construit une suite de motifs comme le montre le schéma.



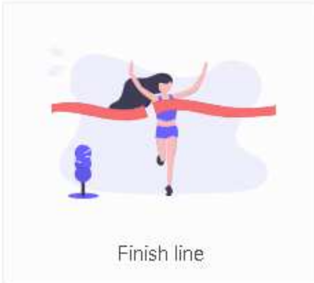
Pour tout nombre $n \in \mathbb{N}_0$, on note C_n le nombre de carré du motif numéro *n*.

(1) Quelle est la nature de la suite (C_n) ? Que vaut sa raison ?

(2) Calcule le nombre de carrés du motif n°1000.

26. Des soldats effectuent un exercice de préparation durant 14 jours. Leur exercice consiste à cartographier une forêt. Ils parcourent 20 kilomètres le premier jour. En raison de la fatigue, ils parcourent chaque jour 5 % de moins que la distance parcourue la veille.
    (1) Combien de kilomètres auront-ils parcourus au total pour effectuer l'exercice ? arrondis ta réponse au mètre près.
    (2) Combien de kilomètres auront-ils parcourus sur les 5 derniers jours de l'exercice ? Arrondis ta réponse au mètre près.

27. Pour se préparer à une course à pied de 25 km, Aline et Léa établissent le protocole d'entraînement suivant. Le premier entraînement fera 2 000 m et ensuite
    - Aline augmentera chaque jour de 20% la distance parcourue le jour précédent ;
    - Léa augmentera chaque jour de 750 m la distance parcourue le jour précédent.



On veut savoir qui atteindra la première les 25 km aux entraînements.

28. En sortant de fabrication, une pièce contient 15 g de plastifiant et on estime à 2 % les pertes annuelles en plastifiant. Le cahier des charges prévoit de garantir les propriétés physiques de cette pièce pendant 20 ans. Or, ces propriétés ne sont plus correctes lorsque la pièce contient moins de 8 g de plastifiant.
La garantie est-elle satisfaisante ?

29. *GOOGLE FORM* : « Suites arithmétiques : calculer un terme ou la raison »
https://forms.gle/2WqX79LNcJ477MQh6

30. *GOOGLE FORM* : « Suites arithmétiques »
https://forms.gle/3McYrj3JRykKaKn9A

31. *GOOGLE FORM* : « Suites géométriques : calculer un terme ou la raison »
https://forms.gle/LKSUgT6axQsasPyA6

32. *GOOGLE FORM* : « Suites géométriques »
https://forms.gle/1eBfZLP1EPTXZkkZ6

PES :

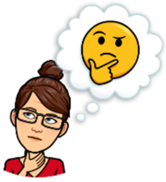
1. On considère une suite de nombres réels $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Détermine n sachant que $u_1 + u_n = 66$, $u_2.u_{n-1} = 128$, $S_n = 126$ et que la suite est une suite géométrique de raison $q > 1$. (*ERM, 2012*)
   Sol : $n = 6$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ une suite arithmétique de raison r.
   Démontre que tout terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, à partir du deuxième, est égal à la moyenne arithmétique des deux termes qui l'encadrent.

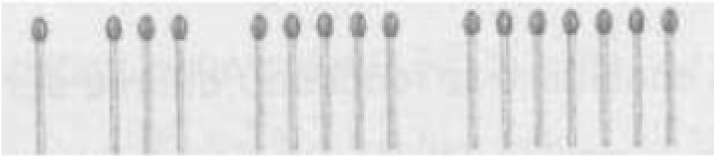
3. Une suite de sept nombres forme une progression arithmétique. La somme de ces sept nombres vaut 224 et la somme des deux derniers vaut 379. Que vaut la différence du cinquième et du deuxième terme de cette suite ?
   (OMB, 2009)

4. La suite géométrique $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots)$ satisfait aux deux conditions :
   $$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 31$$
   $$s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 = 62$$
   Que vaut le dixième terme de cette suite ?
   (OMB, 2006)

__Pour chercher :__



1. Une boîte contient 200 allumettes. On les regroupe par « paquets » de la manière suivante :



   On place 1 allumette dans le premier paquet, puis on place 3 allumettes dans le paquet suivant, puis 5 allumettes dans le troisième paquet, et ainsi de suite…

   A la fin, il ne reste que 4 allumettes dans la boîte.

   Combien y a-t-il de paquets d'allumettes ?

2. La suite (a_n) est définie par $a_1 = 4$ et $a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 2}{a_n + 4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

   (1) Montre rigoureusement que la suite (b_n) définie par $b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique.

   (2) Exprime b_n en fonction de n .

   (3) Déduis-en une expression de a_n en fonction de n.

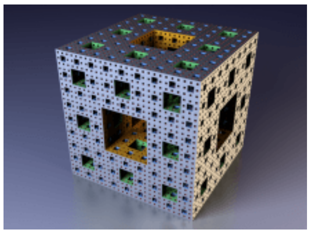
   Correction de l'exercice en vidéo : https://youtu.be/dJDjj975dlA

3. *a*, *b*, *c* sont trois réels distincts non nuls tels que a, b, c pris dans cet ordre, soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q et $3a, 2b, c$ soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Calcule la raison de la suite géométrique.

4. Trois nombres a, b, c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

   Démontre que $\dfrac{2}{a-b}, \dfrac{1}{a}, \dfrac{2}{a-c}$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Le saviez-vous ?



L'éponge de Menger est un solide construit en procédant de la façon suivante : on considère un cube de côté 1, on découpe le cube en 27 petits cubes identiques de côté $\frac{1}{3}$, puis on retire le petit cube central et les six petits cubes situés au centre de chacune des faces. A l'étape suivante, on applique le procédé à tous les petits cubes restants, et ainsi de suite…

On obtient à l'étape n un solide de volume $V_n = \left(\frac{20}{27}\right)^n$.

La suite de ces volumes est donc géométrique.

Cet objet fractal imaginé par le mathématicien autrichien Karl Menger (1902-1985) trouve des applications dans l'industrie et, notamment, dans la fabrication des murs antibruit.

Le saviez-vous ?

Le plus important document mathématique qui nous soit parvenu de l'Egypte ancienne est un papyrus découvert sur le site de la très ancienne ville de Thèbes. Son nom vient de l'Ecossais Alexander Henry Rhind qui l'acheta en 1858. Il est, depuis 1865, conservé au British Museum, à Londres.

Ce papyrus, écrit vers 1550 avant J.-C. par le scribe Ahmès, est, en partie, une copie de résultats plus anciens (vers 2000 avant J.-C.).

Il contient 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage, comme par exemple :

Peut-on diviser 100 pains entre cinq hommes, de manière à former une suite arithmétique, et de façon à ce que la somme des deux plus petites parts soit égale au septième de la somme des trois plus grandes ?