E. Exercices

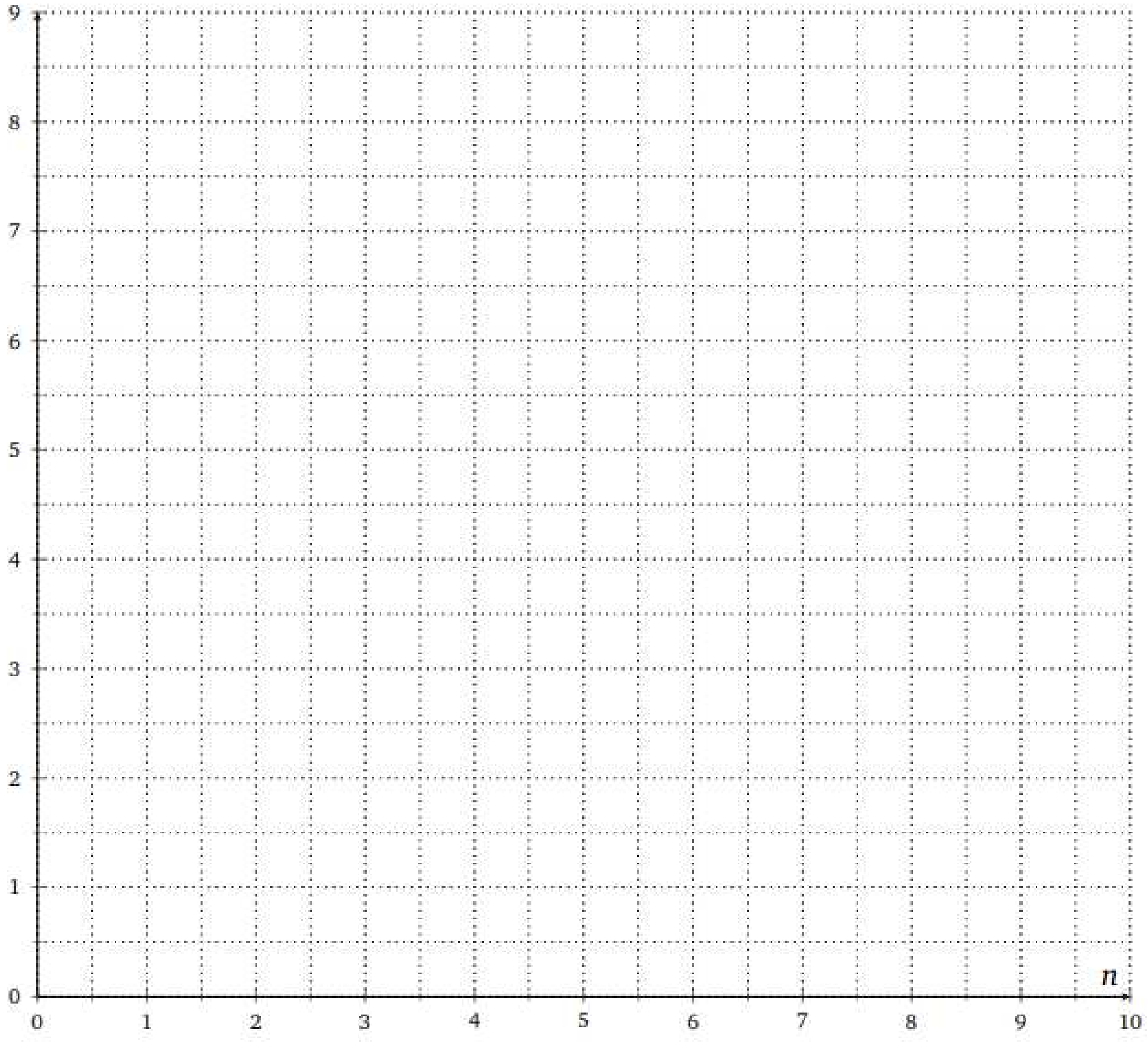
https://bit.ly/3PtOxp0

Utilise la mémoire de la calculatrice !

1. Représente, dans le repère ci-dessous, les six premiers termes

   (1) de la suite arithmétique (u_n) de premier terme 9 et de raison $-\frac{1}{4}$

   (2) de la suite géométrique (v_n) de premier terme 8 et de raison $\frac{1}{2}$



2. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 17$ et de raison $r = 4$. Calcule u_{20} et S_{20}.

3. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_1 = -7$ et de raison $q = 3$. Calcule u_{10} et S_5.

4. On considère la suite (u_n) définie par son terme général : $u_n = 5 - 2n$.

   (1) Montre rigoureusement que (u_n) est une suite arithmétique dont tu préciseras la raison.

   (2) Que vaut u_{100} ?

   (3) Calcule la somme $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{100}$.

5. On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

   (1) Montre rigoureusement que (u_n) est une suite arithmétique dont tu préciseras la raison.

   (2) Que vaut u_{100} ?

6. (u_n) est une suite arithmétique, calcule u_1 sachant que $u_{31} = 17$ et $r = 2$.

7. Soit (u_n) une suite géométrique, calcule u_1 si $u_5 = 512$ et $q = 2$.

8. (u_n) est une suite arithmétique, calcule u_1 et r sachant que $u_7 = 25$ et $u_{12} = 45$.

9. Calcule la somme $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2014 + 2015$.

Le saviez-vous ?

Carl Friedrich Gauss, mathématicien allemand (1777-1855) aurait calculé très rapidement, à l'âge de 9 ans, la somme des nombres entiers de 1 à 100, impressionnant ainsi son maître et ses camarades de classe !

10. La somme de quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique est 35 et le quatrième vaut quatre fois le premier. Quels sont ces quatre nombres ?

11. Soit (u_n) une suite géométrique, calcule le premier terme et la raison dans les situations suivantes :

   (1) $u_6 = 232328$ et $u_{10} = 30233088$

   (2) $u_2 = 392$ et $u_5 = 49$

   (3) $u_4 = 64000$ et $u_6 = 32768$

12. Soit la suite 1 ; 5 ; 9 ; 13 ; … Quelle est la place occupée par 65 ?

13. Calcule $12 + 15 + 18 + \ldots + 72$.

14. Détermine tous les réels y pour que les trois réels 3, $y - 1$ et $2y - 1$ soient trois nombres consécutifs d'une suite géométrique.

15. Détermine combien il faut totaliser de termes successifs de la suite arithmétique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{3}$ pour que leur somme soit égale à 48.

16. Détermine trois nombres en progression arithmétique tels que leur somme soit 27 et la somme de leurs carrés soit 261.

17. Détermine 7 nombres impairs consécutifs dont la somme est 7^3.

18. Calcule $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10}$.

19. Montre rigoureusement que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3^n}{2^{2n+1}}$ est une suite géométrique.

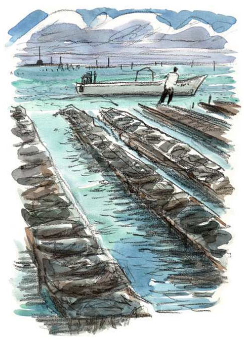
20. Montre rigoureusement que la suite (v_n) est géométrique sachant que pour tout n

$$v_n = u_n - 2 \text{ et } \begin{cases} u_1 = 7 \\ u_n = \dfrac{2u_{n-1}+6}{5} \end{cases} \cdot$$

21. Lors d'une épidémie, un institut médical a constaté que le premier jour de recensement du nombre de patients malades, 3500 personnes étaient atteintes, puis que le nombre de malades augmentait de 10 % par semaine. On appelle u_1 le nombre de malades le premier jour, u_2 celui au bout d'une semaine et u_n celui au bout de $n-1$ semaines.
    (1) Précise la valeur de u_1 puis calcule u_2 et u_3.
    (2) Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?
    (3) Déduis-en la nature de la suite (u_n).
    (4) Calcule le nombre de malades au bout de 12 semaines.

22. A 8 heures, on injecte à un malade 5 cl d'un analgésique. Le corps élimine naturellement 0,4 cl de produit par heure. Il faut refaire une injection quand il reste moins de 1,5 cl d'analgésique. Quand faudra-t-il effectuer une nouvelle injection ?

23. Cette année, la production d'un ostréiculteur est de 20 tonnes. Il prévoit une augmentation de 2 tonnes par an.
    (1) Calcule la production envisagée dans 6 ans.
    (2) On note P_n la production prévisible totale, exprimée en tonnes, obtenue au bout de n années. Ainsi $P_1 = 20$.
    Détermine au bout de combien d'années la production totale devrait être supérieure à 200 tonnes.



24. L'entreprise Eurodist loue un entrepôt de 15 000 m³.

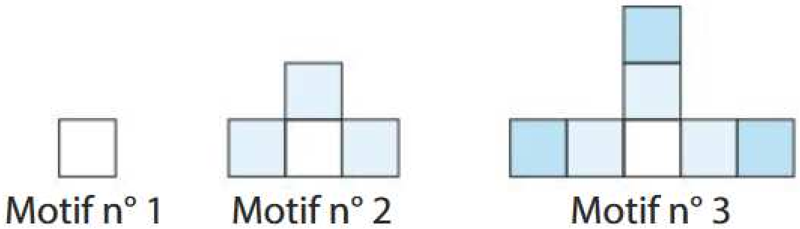
Le 1er janvier 2011, le volume de matériel stocké était de 2500 m³. Depuis, il a augmenté régulièrement chaque année de 15 %.

(1) Quel était, en m³, le volume de matériel stocké le 1er janvier 2012 ? le 1er janvier 2013 ?

(2) Déduis-en la nature de la suite formée des volumes stockés. Quelle en est la raison ?

(3) L'entrepôt loué sera-t-il assez grand pour stocker le matériel en 2021 ? Justifie ta réponse.

25. On construit une suite de motifs comme le montre le schéma.



Pour tout nombre $n \in \mathbb{N}_0$, on note C_n le nombre de carré du motif numéro *n*.

(3) Quelle est la nature de la suite (C_n) ? Que vaut sa raison ?

(4) Calcule le nombre de carrés du motif n°1000.

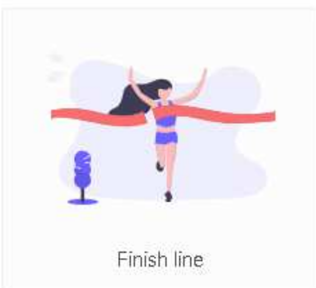
26. Un technicien est embauché dans une entreprise et son salaire annuel est fixé à 22 000 €. Il est augmenté de 3 % à la fin de chaque année.

(1) Quel sera le salaire de ce technicien au début de la 12ème année ?

(2) Quelle est alors au début de la 12ème année la somme totale gagnée ?

27. Pour se préparer à une course à pied de 25 km, Aline et Léa établissent le protocole d'entraînement suivant. Le premier entraînement fera 2 000 m et ensuite

- Aline augmentera chaque jour de 20% la distance parcourue le jour précédent ;
- Léa augmentera chaque jour de 750 m la distance parcourue le jour précédent.



On veut savoir qui atteindra la première les 25 km aux entraînements.

28. En sortant de fabrication, une pièce contient 15 g de plastifiant et on estime à 2 % les pertes annuelles en plastifiant. Le cahier des charges prévoit de garantir les propriétés physiques de cette pièce pendant 20 ans. Or, ces propriétés ne sont plus correctes lorsque la pièce contient moins de 8 g de plastifiant.
La garantie est-elle satisfaisante ?

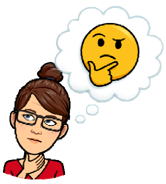
29. *GOOGLE FORM* : « Suites arithmétiques : calculer un terme ou la raison »
https://forms.gle/2WqX79LNcJ477MQh6

30. *GOOGLE FORM* : « Suites arithmétiques »
https://forms.gle/3McYrj3JRykKaKn9A

31. *GOOGLE FORM* : « Suites géométriques : calculer un terme ou la raison »
https://forms.gle/LKSUgT6axQsasPyA6

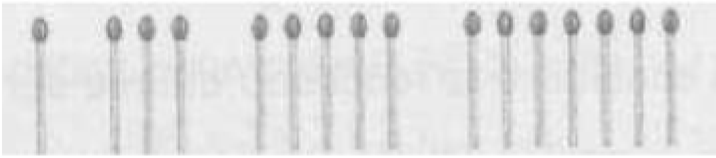
32. *GOOGLE FORM* : « Suites géométriques »
https://forms.gle/1eBfZLP1EPTXZkkZ6

Pour chercher :



1. On donne l'équation $4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$.
On demande de résoudre cette équation sachant que ses racines sont en progression arithmétique. (*Examen d'admission, ERM, 2004*)
Sol : $S = \left\{-\frac{1}{2}; 2; \frac{9}{2}\right\}$

2. Une boîte contient 200 allumettes. On les regroupe par « paquets » de la manière suivante :



On place 1 allumette dans le premier paquet, puis on place 3 allumettes dans le paquet suivant, puis 5 allumettes dans le troisième paquet, et ainsi de suite…
A la fin, il ne reste que 4 allumettes dans la boîte.
Combien y a-t-il de paquets d'allumettes ?

3. La suite (a_n) est définie par $a_1 = 4$ et $a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

   (1) Montre rigoureusement que la suite (b_n) définie par $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique.

   (2) Exprime b_n en fonction de *n*.

   (3) Déduis-en une expression de a_n en fonction de *n*.

   Correction de l'exercice en vidéo : https://youtu.be/dJDjj975dlA

4. On considère une suite de nombres réels $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Détermine *n* sachant que $u_1 + u_n = 66$, $u_2.u_{n-1} = 128$, $S_n = 126$ et que la suite est une suite géométrique de raison $q > 1$. (*ERM, 2012*)

5. On considère un triangle quelconque *ABC*. Soit un point *P* non situé sur les côtés du triangle. On prend le milieu M_1 de $[AP]$ puis M_2 le milieu de $[BM_1]$ puis M_3 le milieu de $[CM_2]$ puis M_4 le milieu de $[AM_3]$… Où se placent les points M_n quand on répète l'opération une infinité de fois ?

6. *a*, *b*, *c* sont trois réels distincts non nuls tels que *a*, *b*, *c*, pris dans cet ordre, soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison *q* et *3a*, *2b*, *c* soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Calcule la raison de la suite géométrique.

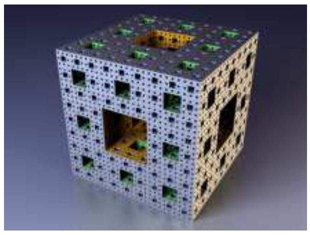
7. Quelles sont les suites qui sont à la fois arithmétiques et géométriques ?

8. Trois nombres a, b, c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

   Démontre que $\frac{2}{a-b}, \frac{1}{a}, \frac{2}{a-c}$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

9. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $1+\frac{x}{x-1}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{x-1}\right)^7=0$

Le saviez-vous ?



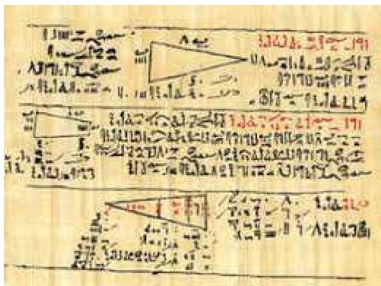
L'éponge de Menger est un solide construit en procédant de la façon suivante : on considère un cube de côté 1, on découpe le cube en 27 petits cubes identiques de côté $\frac{1}{3}$, puis on retire le petit cube central et les six petits cubes situés au centre de chacune des faces. A l'étape suivante, on applique le procédé à tous les petits cubes restants, et ainsi de suite…

On obtient à l'étape n un solide de volume $V_n=\left(\frac{20}{27}\right)^n$.

La suite de ces volumes est donc géométrique.

Cet objet fractal imaginé par le mathématicien autrichien Karl Menger (1902-1985) trouve des applications dans l'industrie et, notamment, dans la fabrication des murs antibruit.

Le saviez-vous ?



Le plus important document mathématique qui nous soit parvenu de l'Egypte ancienne est un papyrus découvert sur le site de la très ancienne ville de Thèbes.

Son nom vient de l'Ecossais Alexander Henry Rhind qui l'acheta en 1858. Il est, depuis 1865, conservé au British Museum, à Londres.

Ce papyrus, écrit vers 1550 avant J.-C. par le scribe Ahmès, est, en partie, une copie de résultats plus anciens (vers 2000 avant J.-C.).

Il contient 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage, comme par exemple :

Peut-on diviser 100 pains entre cinq hommes, de manière à former une suite arithmétique, et de façon à ce que la somme des deux plus petites parts soit égale au septième de la somme des trois plus grandes ?