# UAA 2 : Les suites

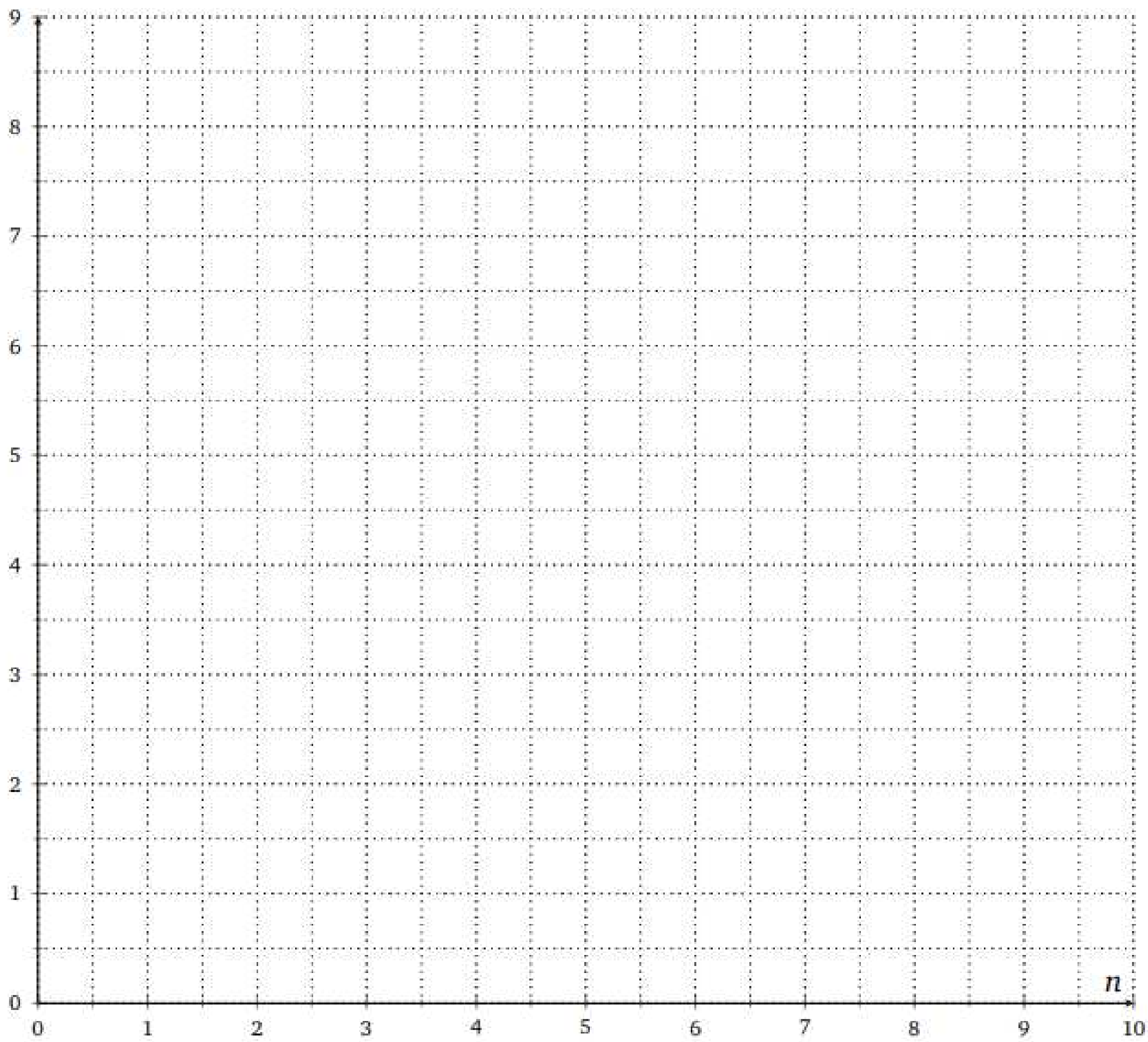
*Solutions*

## E. Exercices

1. Représente, dans le repère ci-dessous, les six premiers termes

   (1) de la suite arithmétique $(u_n)$ de premier terme 9 et de raison $-\dfrac{1}{4}$

   (2) de la suite géométrique $(v_n)$ de premier terme 8 et de raison $\dfrac{1}{2}$



2. $(u_n)$ est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 17$ et de raison $r = 4$. Calcule $u_{20}$ et $S_{20}$.

$$\boxed{u_{20} = 93 \text{ et } S_{20} = 1100}$$

3. Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme $u_1 = -7$ et de raison $q = 3$. Calcule $u_{10}$ et $S_5$.

$$\boxed{u_{10} = -137\,781 \text{ et } S_5 = -847}$$

4. On considère la suite $(u_n)$ définie par son terme général : $u_n = 5 - 2n$.

   (1) Montre rigoureusement que $(u_n)$ est une suite arithmétique dont tu préciseras la raison.

   $$\boxed{u_{n+1} - u_n = -2 = r}$$

   (2) Que vaut $u_{100}$ ?

   $$\boxed{u_{100} = -195}$$

   (3) Calcule la somme $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{100}$.

   $$\boxed{S_{100} = -9600}$$

5. On considère la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

   (1) Montre rigoureusement que $(u_n)$ est une suite arithmétique dont tu préciseras la raison.

   $$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}}$$

   (2) Que vaut $u_{100}$ ?

   $$\boxed{u_{100} = \frac{99}{2}}$$

6. $(u_n)$ est une suite arithmétique, calcule $u_1$ sachant que $u_{31}=17$ et $r=2$.

$u_1=-43$

7. Soit $(u_n)$ une suite géométrique, calcule $u_1$ si $u_5=512$ et $q=2$.

$u_1=32$

8. $(u_n)$ est une suite arithmétique, calcule $u_1$ et $r$ sachant que $u_7=25$ et $u_{12}=45$.

$u_1=1$ et $r=4$

9. Calcule la somme $S=1+2+3+\ldots+2014+2015$.

$S_{2015}=2\,031\,120$

Le saviez-vous ?

Carl Friedrich Gauss, mathématicien allemand (1777-1855) aurait calculé très rapidement, à l'âge de 9 ans, la somme des nombres entiers de 1 à 100, impressionnant ainsi son maître et ses camarades de classe !

10. La somme de quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique est 35 et le quatrième vaut quatre fois le premier. Quels sont ces quatre nombres ?

3,5 ; 7 ; 10,5 et 14

11. Soit $(u_n)$ une suite géométrique, calcule le premier terme et la raison dans les situations suivantes :

(1) $u_6=232\,328$ et $u_{10}=30\,233\,088$

$q=3{,}38$ et $u_1=528{,}6$

(2) $u_2=392$ et $u_5=49$

$q=\frac{1}{2}$ et $u_1=784$

(3) $u_4=64\,000$ et $u_6=32\,768$

$q=0{,}7155$ et $u_1=174\,692{,}81$

12. Soit la suite 1 ; 5 ; 9 ; 13 ; … Quelle est la place occupée par 65 ?

65 occupe la 17$^{e}$ place

13. Calcule $12+15+18+\ldots+72$.

$S_{21}=882$

14. Détermine tous les réels $y$ pour que les trois réels 3, $y-1$ et $2y-1$ soient trois nombres consécutifs d'une suite géométrique.

$y=7,46$ ou $y=0,54$

15. Détermine combien il faut totaliser de termes successifs de la suite arithmétique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{3}$ pour que leur somme soit égale à 48.

48 est la somme des 16 premiers termes.

16. Détermine trois nombres en progression arithmétique tels que leur somme soit 27 et la somme de leurs carrés soit 261.

Il s'agit des nombres 6 ; 9 et 12.

17. Détermine 7 nombres impairs consécutifs dont la somme est $7^3$.

Il s'agit des nombres 43 ; 45 ; 47 ; 49 ; 51 ; 53 et 55.

18. Calcule $S=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{10}$.

$S_{11}=2047$

19. Montre rigoureusement que la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \frac{3^n}{2^{2n+1}}$ est une suite géométrique.

$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{4} \in \mathbb{R}}$

20. Montre rigoureusement que la suite $(v_n)$ est géométrique sachant que pour tout $n$

$v_n = u_n - 2$ et $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_n = \dfrac{2u_{n-1}+6}{5} \end{cases}$.

$\boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{5} \in \mathbb{R}}$

21. Lors d'une épidémie, un institut médical a constaté que le premier jour de recensement du nombre de patients malades, 3500 personnes étaient atteintes, puis que le nombre de malades augmentait de 10 % par semaine. On appelle $u_1$ le nombre de malades le premier jour, $u_2$ celui au bout d'une semaine et $u_n$ celui au bout de $n-1$ semaines.

(1) Précise la valeur de $u_1$ puis calcule $u_2$ et $u_3$.

$\boxed{u_1 = 3500,\ u_2 = 3850 \text{ et } u_3 = 4235}$

(2) Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?

$\boxed{\text{On multiplie par } 1{,}1.}$

(3) Déduis-en la nature de la suite $(u_n)$.

$\boxed{(u_n) \text{ est une suite géométrique.}}$

(4) Calcule le nombre de malades au bout de 12 semaines.

$\boxed{u_{13} = 10984{,}5 \text{ malades}}$

22. A 8 heures, on injecte à un malade 5 cl d'un analgésique. Le corps élimine naturellement 0,4 cl de produit par heure. Il faut refaire une injection quand il reste moins de 1,5 cl d'analgésique. Quand faudra-t-il effectuer une nouvelle injection ?

23. Cette année, la production d'un ostréiculteur est de 20 tonnes. Il prévoit une augmentation de 2 tonnes par an.

(1) Calcule la production envisagée dans 6 ans.

(2) On note $P_n$ la production prévisible totale, exprimée en tonnes, obtenue au bout de $n$ années. Ainsi $P_1 = 20$.

Détermine au bout de combien d'années la production totale devrait être supérieure à 200 tonnes.

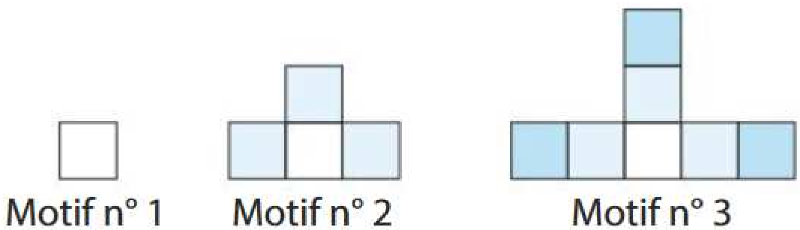
24. L'entreprise Eurodist loue un entrepôt de 15 000 m³.
Le 1er janvier 2011, le volume de matériel stocké était de 2500 m³. Depuis, il a augmenté régulièrement chaque année de 15 %.

(1) Quel était, en m³, le volume de matériel stocké le 1er janvier 2012 ? le 1er janvier 2013 ?

(2) Déduis-en la nature de la suite formée des volumes stockés. Quelle en est la raison ?

(3) L'entrepôt loué sera-t-il assez grand pour stocker le matériel en 2021 ? Justifie ta réponse.

25. On construit une suite de motifs comme le montre le schéma.




Pour tout nombre $n \in \mathbb{N}_0$, on note $C_n$ le nombre de carré du motif numéro $n$.

(3) Quelle est la nature de la suite $(C_n)$ ? Que vaut sa raison ?

(4) Calcule le nombre de carrés du motif n°1000.

26. Un technicien est embauché dans une entreprise et son salaire annuel est fixé à 22 000 €. Il est augmenté de 3 % à la fin de chaque année.

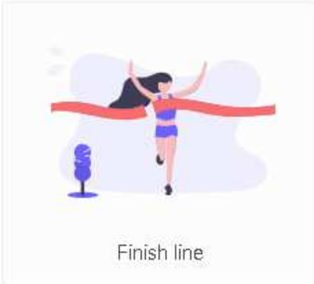
    (1) Quel sera le salaire de ce technicien au début de la 12ème année ?

    (2) Quelle est alors au début de la 12ème année la somme totale gagnée ?

27. Pour se préparer à une course à pied de 25 km, Aline et Léa établissent le protocole d'entraînement suivant. Le premier entraînement fera 2 000 m et ensuite

    - Aline augmentera chaque jour de 20% la distance parcourue le jour précédent ;
    - Léa augmentera chaque jour de 750 m la distance parcourue le jour précédent.

    On veut savoir qui atteindra la première les 25 km aux entraînements.




28. En sortant de fabrication, une pièce contient 15 g de plastifiant et on estime à 2 % les pertes annuelles en plastifiant. Le cahier des charges prévoit de garantir les propriétés physiques de cette pièce pendant 20 ans. Or, ces propriétés ne sont plus correctes lorsque la pièce contient moins de 8 g de plastifiant.

    La garantie est-elle satisfaisante ?