UAA 2 : Les suites
Solutions

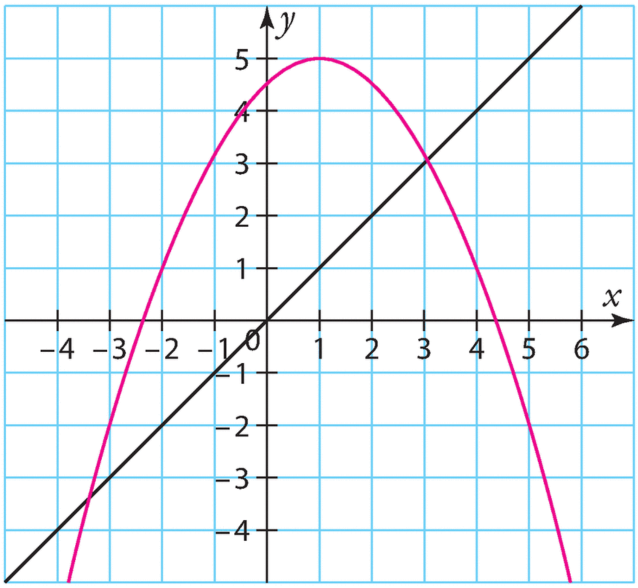
F. Limite d'une suite

4. Exercices

1. On a représenté graphiquement une fonction f et la droite d'équation $y = x$.

   Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

   Détermine la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n).



$u_1 = -3$

$u_2 = -2$

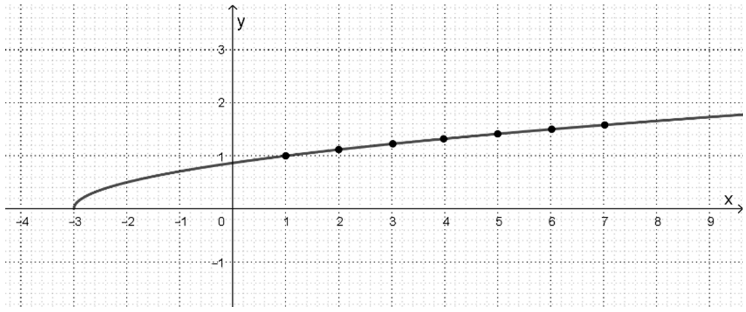
$u_3 = 1$

$u_4 = 5$

$u_5 = -2$

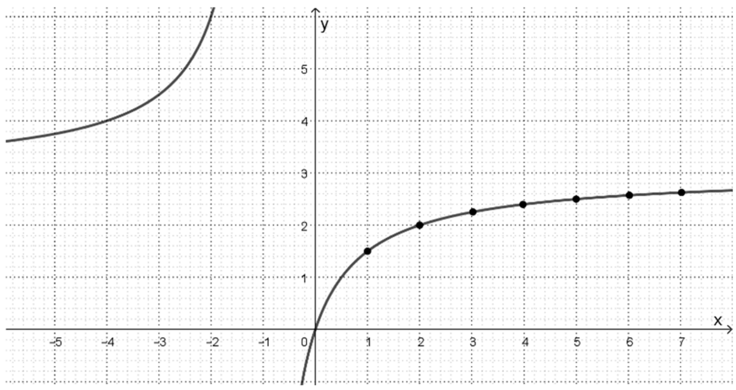
2. Représente graphiquement les 4 premiers termes de chacune des suites suivantes en traçant la fonction qui leur est associée et conjecture la limite éventuelle de la suite :

   (1) $u_n = \frac{1}{2}\sqrt{n+3}$



$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

(2) $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$



$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

(3) $u_n = \dfrac{4}{2n-1}$

(4) $u_n = -n^2 + n + 4$

(5) $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n + 3} \end{cases}$

(6) $\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$

3. Calcule la limite de chaque suite en utilisant un tableur informatique :

(1) $\begin{cases} u_1 = 15 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \end{cases}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

(2) $\begin{cases} u_1 = -1{,}5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

(3) $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

(4) $u_n = -n^2 + n + 4$

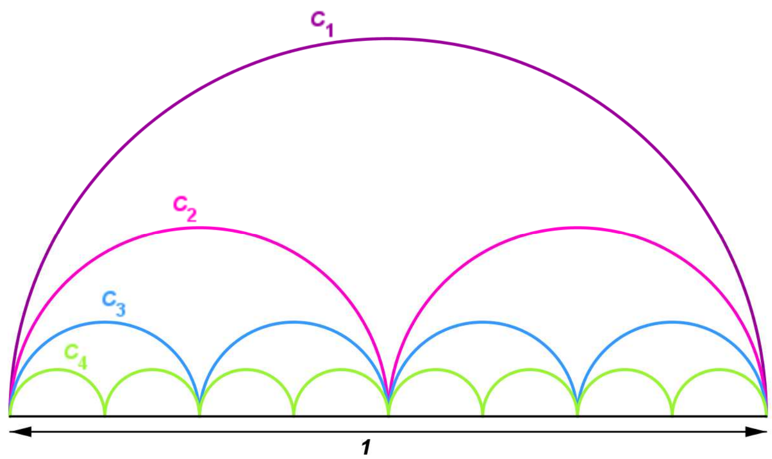
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

4. On considère C_1, la courbe formée par le demi-cercle de diamètre 1 ;

ensuite C_2, la courbe formée par les **deux** demi-cercles de diamètre $\frac{1}{2}$;

ensuite C_3, la courbe formée par les **quatre** demi-cercles de diamètre $\frac{1}{4}$;

… et ainsi de suite, indéfiniment.



(1) Calcule C_1, C_2 et C_3. Déduis-en C_{10}.

$C_1 = \frac{\pi}{2}$; $C_2 = \frac{\pi}{2}$; $C_3 = \frac{\pi}{2}$; $C_{10} = \frac{\pi}{2}$

(2) Calcule S_1, l'aire de la surface comprise entre la courbe C_1 et le diamètre du premier demi-cercle.

(3) Calcule S_2, l'aire de la surface comprise entre la courbe C_2 et le diamètre du premier demi-cercle.

(4) Calcule S_3, l'aire de la surface comprise entre la courbe C_3 et le diamètre du premier demi-cercle.

(5) Quelle est la nature de la suite définie par les nombres S_n ? Précise le premier terme et la raison.

(6) Que vaut $\lim_{n \to +\infty} S_n$?

5. *Le nombre d'or*

Construis un rectangle (au choix, n'importe lequel).

Ce rectangle est appelé R_1, de longueur L_1 et de largeur l_1.

A partir de ce rectangle, construis-en un deuxième, appelé R_2, en juxtaposant sur le grand côté de R_1, un carré.

De la même manière, construis R_3, en juxtaposant un carré sur la longueur de R_2.

Dès que tu dépasses le cadre de la feuille, poursuis en complétant le tableau ci-dessous qui reprend, pour chaque rectangle, ses dimensions et son coefficient de forme.

N° des rectangles	L_n	l_n	$k_n = \frac{L_n}{l_n}$ (au millième près)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

(1) Que devient chaque suite lorsque le numéro du rectangle devient très grand ?

(2) Que vaut L_{n+1} en fonction de L_n et l_n ?

(3) Que vaut l_{n+1} en fonction de L_n et l_n ?

(4) Que vaut k_{n+1} en fonction de k_n ?

(5) L'expression de k_{n+1} en fonction de k_n permet-elle de trouver avec précision la limite de la suite (k_n) ? S'il est vrai que la suite des termes se stabilise (autour de $k = 1,618$ semble-t-il), c'est que $k_{n+1} = k_n$ lorsque *n* devient infiniment grand.

6. Suites de Syracuse : Soit la suite (u_n) de premier terme u_1 positif, construite de la manière suivante :
   - si u_n est pair alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$
   - si u_n est impair alors $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

   (1) Calcule les dix premiers termes de la suite si $u_1 = 1$. Est-elle convergente ?

   (2) Calcule les dix premiers termes de la suite si $u_1 = 12$. Est-elle convergente ?

   (3) Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de toutes les suites de Syracuse ?