F. Limite d'une suite

Achille et la tortue

La notion de limite d'une suite a permis de comprendre un paradoxe imaginé par le philosophe grec Zénon d'Elée environ 465 ans avant Jésus-Christ : le paradoxe d'Achille et de la tortue.

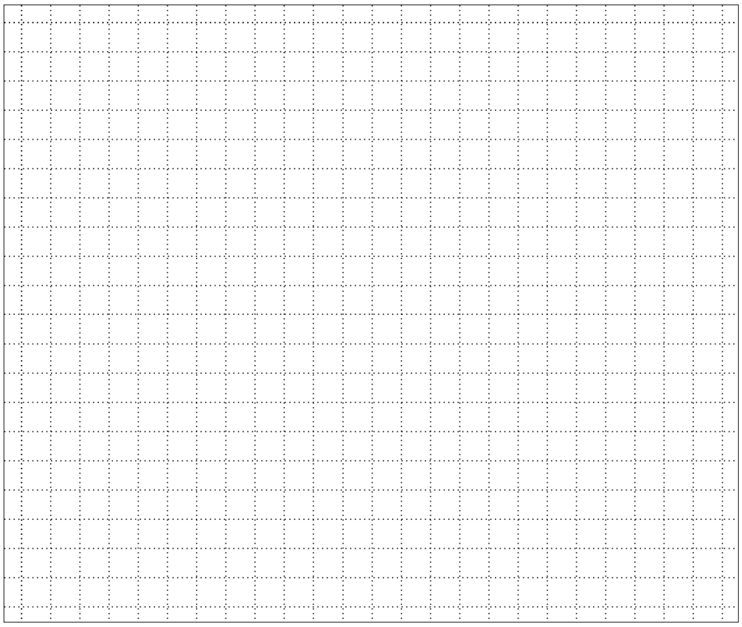
Pour une raison maintenant oubliée dans les brumes du temps, une course avait été organisée entre le héros Achille et une tortue. Le premier se déplaçant beaucoup plus vite que la seconde, celle-ci démarra avec une certaine avance pour équilibrer les chances des deux concurrents…

La première chose à faire pour Achille fût de combler son retard en se rendant à l'endroit de départ de la tortue qui, pendant ce laps de temps, s'était déplacée. Achille dut donc combler ce nouvel handicap alors que la tortue, bien que d'une lenteur désespérante, continuait inexorablement sa route, créant ainsi un handicap supplémentaire… Achille ne put jamais rattraper la tortue !

1. Approche graphique

(1) Représentation graphique d'une suite

Si on connaît le **terme général** de la suite, on représentera celle-ci par un ensemble de points isolés de coordonnées $(n;u_n)$ (le numéro de place *n* de chaque terme sur l'axe des abscisses et la valeur u_n de ce terme sur l'axe des ordonnées).



Exemple : On considère la suite, définie pour tout entier naturel n, par $u_n = 3+\dfrac{1}{n+1}$.

Représentons les 5 premiers termes de cette suite, en traçant la fonction qui lui est associée.

Comme $u_n = f(n)$ où f est la fonction $f(x) = 3 + \frac{1}{x+1}$, les termes de la suite sont les ordonnées des points d'abscisses entières positives de la courbe représentative de la fonction f.

Que remarques-tu ? ....

En d'autres termes, ……………………

Si la suite est définie **par récurrence** (u_1 est donné et $u_{n+1} = f(u_n)$), alors on peut représenter la suite à l'aide de la représentation graphique de f et de la droite d'équation $y = x$.

Marche à suivre
Soit f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
On trace G_f, la courbe représentative de *f*, ainsi que la droite $d \equiv y = x$.
On place u_1 sur l'axe des abscisses.
On construit le point $A_1(u_1; f(u_1))$ situé sur G_f.
On place son ordonnée qui est $f(u_1) = u_2$.
On reporte u_2 sur l'axe des abscisses en utilisant *d*.
On réitère le même procédé pour obtenir u_3 (et les termes suivants) sur l'axe des abscisses et construire le point $A_3(u_3; u_4)$ (et les points suivants).

Ainsi, les termes de la suite sont les abscisses des points $A_1, A_2, A_3, \dots$.

Exemple : Représentons la suite $\left(u_n\right)$ définie par $\begin{cases} u_1 = -\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$.

REPRESENTATION D'UNE SUITE DEFINIE PAR RECURRENCE

https://youtu.be/aU_Suh34V9A

2. Limite et convergence

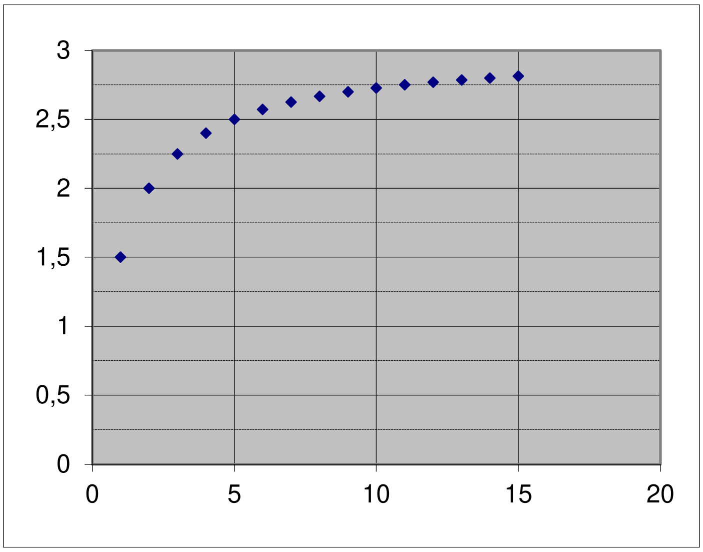
Lorsque l'indice *n* d'une suite augmente sans cesse, on dit que n tend vers $+\infty$ et on écrit $n \to +\infty$.

Chercher la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ quand n augmente sans cesse, c'est **déterminer le comportement des éléments de cette suite** si le naturel n augmente sans cesse.

Cette limite, si elle existe, est notée $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(1) Limite réelle

La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$ admet comme premiers termes $\dfrac{3}{2}$, 2, $\dfrac{9}{4}$, $\dfrac{12}{5}$, $\dfrac{5}{2}$,...



Cette suite converge vers...... , en d'autres termes $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n}{n+1} = ...$

En effet, prenons l'intervalle $I = \left]2,5;3,1\right[$. A partir de $u_7 = 2,625$, tous les termes de la suite appartiennent à I .

Prenons un autre intervalle $I = \left]2,8555\ ;\ 3,1\right[$. Tous les termes, sauf les 19 premiers, appartiennent à l'intervalle.

La valeur des termes devient aussi proche que l'on veut d'une valeur réelle b, pour autant que n dépasse une certaine valeur ; on dit alors que la suite est **<u>convergente</u>**. Elle converge vers b et b est la limite de la suite.

Définition :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = b$$

$$\Updownarrow$$

Lorsque l'indice n augmente sans cesse, à partir d'une certaine valeur de n, les réels $|u_n - b|$ deviennent plus petits que n'importe quel réel strictement positif (aussi petit que l'on veut).

$$\Updownarrow$$

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+\right)\left(\exists m \in \mathbb{N}_0\right): n > m \Rightarrow |u_n - b| < \varepsilon$$

(2) Limite en l'infini

Exemple : Prenons la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n^2+1}$.

$u_1 = \ldots$ $\qquad$ $u_{100} = \ldots$

$u_2 = \ldots$ $\qquad$ $u_{1000} = \ldots$

$u_3 = \ldots$

On conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ldots$

Définition :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

$$\Updownarrow$$

Lorsque l'indice n augmente sans cesse, à partir d'une certaine valeur de n, les réels u_n deviennent plus grands que n'importe quel réel strictement positif aussi grand que l'on veut.

$$\Updownarrow$$

$$\left(\forall r \in \mathbb{R}_0^+\right)\left(\exists m \in \mathbb{N}_0\right): n > m \Rightarrow u_n > r$$

Exemple : Prenons la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{-n^2}{n+1}$.

$u_1 = \ldots$ $\qquad$ $u_{100} = \ldots$

$u_2 = \ldots$ $\qquad$ $u_{1000} = \ldots$

$u_3 = \ldots$

On conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ldots$

Définition :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

$$\Updownarrow$$

Lorsque l'indice *n* augmente sans cesse, à partir d'une certaine valeur de n,

les réels u_n deviennent plus petits que n'importe quel réel strictement négatif aussi grand que l'on veut.

$$\Updownarrow$$

$$\left(\forall r \in \mathrm{IR}_0^-\right)\left(\exists m \in \mathrm{IN}_0\right) : n > m \Rightarrow u_n < r$$

Remarques :

- Toute suite qui ne converge pas vers un nombre réel est dite **divergente**.
- La suite (u_n) **n'a pas de limite** si elle ne tend ni vers un réel ni vers l'infini.

Exemple : Prenons la suite (u_n) définie par $u_n = (-2)^n$.

Voici un tableau de valeurs :

n	1	2	3	4	5	$\dots$	100	101	$\dots$
$(-2)^n$	-2	4	-8	16	-32		$1{,}26.10^{30}$	$-2{,}53.10^{30}$	

Cette suite n'a pas de limite puisque les termes changent alternativement de signe, lorsque n augmente.

(3) Utilisation de l'informatique pour conjecturer la limite d'une suite

A l'aide d'un tableur, comme Excel ou Google Sheet, on peut déduire la limite d'une suite, qu'elle soit définie par son terme général ou par récurrence.

Exemple : Engendrons les 30 premiers de la suite définie par $u_n = \dfrac{n-1}{n+2}$ et de la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = v_n - \dfrac{v_n}{6} \end{cases}$ et conjecturons la limite de chaque suite.

Suivre le lien : https://bit.ly/3w9svkR

3. Limite de suites arithmétiques et géométriques

(1) Limite d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in \mathrm{IN}_0}$ de raison $r \neq 0$

- Si $r > 0$, la suite est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

(2) Limite d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in \mathrm{IN}_0}$ de raison $q \neq 0$

- Si $q \leq -1$, la suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}_0}$ n'a pas de limite.
- Si $0 < |q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q > 1$ et $u_1 > 0$, la suite est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $q > 1$ et $u_1 < 0$, la suite est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

(3) Cas particulier

Si $0 < |q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}\right) = \dfrac{1}{1-q}$.

<u>Démonstration :</u>

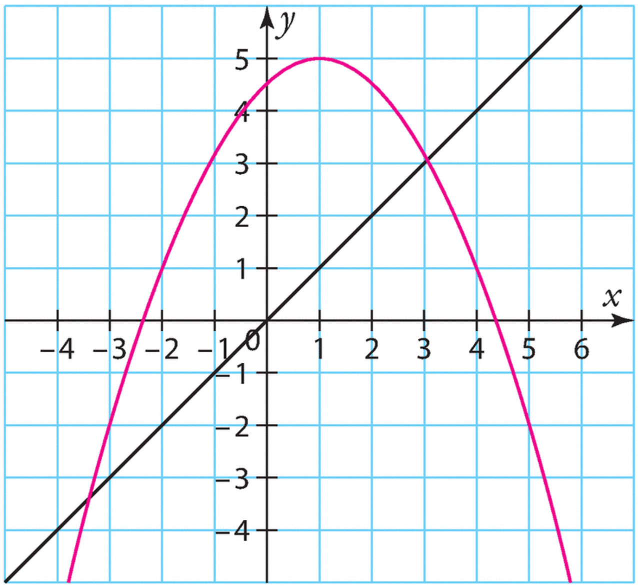
4. Exercices

https://bit.ly/3dBUqTO

1. On a représenté graphiquement une fonction f et la droite d'équation $y = x$.

   Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

   Détermine la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n).



2. Représente graphiquement les 4 premiers termes de chacune des suites suivantes en traçant la fonction qui leur est associée. Utilise les manipulations graphiques et choisis deux carreaux pour une unité.

   Enfin, conjecture la limite éventuelle de la suite :

   (1) $u_n = \frac{1}{2}\sqrt{n+3}$

   (2) $u_n = \frac{3n}{n+1}$

   (3) $u_n = \frac{4}{2n-1}$

   (4) $u_n = -n^2 + n + 4$

   (5) $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n + 3} \end{cases}$

   (6) $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_n = 2u_n - 1 \end{cases}$

3. Calcule la limite de chaque suite en utilisant un tableur informatique :

   (1) $\begin{cases} u_1 = 15 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \end{cases}$

   (2) $\begin{cases} u_1 = -1{,}5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

   (3) $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$

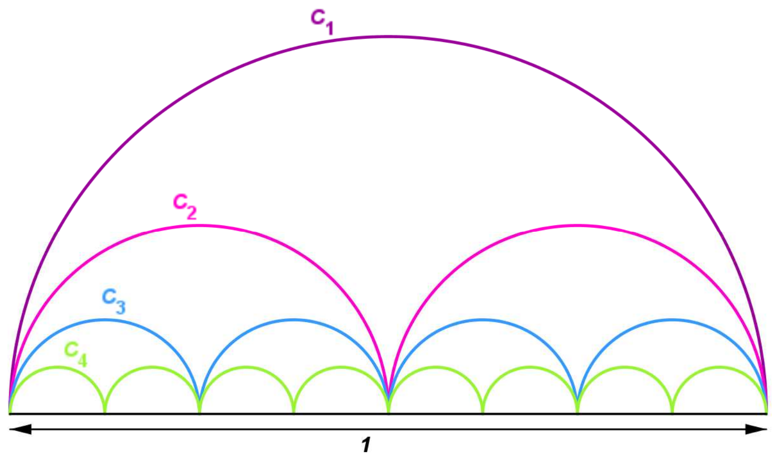
   (4) $u_n = -n^2 + n + 4$

4. On considère le cercle C_1, la courbe formée par le demi-cercle de diamètre 1 ;

ensuite C_2, la courbe formée par les **deux** demi-cercles de diamètre $\frac{1}{2}$;

ensuite C_3, la courbe formée par les **quatre** demi-cercles de diamètre $\frac{1}{4}$;

… et ainsi de suite, indéfiniment.



(1) Calcule C_1, C_2 et C_3. Déduis-en C_{10}.

(2) Calcule S_1, l'aire de la surface comprise entre la courbe C_1 et le diamètre du premier demi-cercle.

(3) Calcule S_2, l'aire de la surface comprise entre la courbe C_2 et le diamètre du premier demi-cercle.

(4) Calcule S_3, l'aire de la surface comprise entre la courbe C_3 et le diamètre du premier demi-cercle.

(5) Quelle est la nature de la suite définie par les nombres S_n ? Précise le premier terme et la raison.

(6) Que vaut $\lim_{n \to +\infty} S_n$?

5. *Le nombre d'or*

Construis un rectangle (au choix, n'importe lequel).

Ce rectangle est appelé R_1, de longueur L_1 et de largeur l_1.

A partir de ce rectangle, construis-en un deuxième, appelé R_2, en juxtaposant sur le grand côté de R_1, un carré.

De la même manière, construis R_3, en juxtaposant un carré sur la longueur de R_2.

Dès que tu dépasses le cadre de la feuille, poursuis en complétant le tableau ci-dessous qui reprend, pour chaque rectangle, ses dimensions et son coefficient de forme.

N° des rectangles	L_n	l_n	$k_n = \frac{L_n}{l_n}$ (au millième près)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

(1) Que devient chaque suite lorsque le numéro du rectangle devient très grand ?

(2) Que vaut L_{n+1} en fonction de L_n et l_n ?

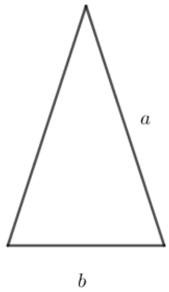
(3) Que vaut l_{n+1} en fonction de L_n et l_n ?

(4) Que vaut k_{n+1} en fonction de k_n ?

(5) L'expression de k_{n+1} en fonction de k_n permet-elle de trouver avec précision la limite de la suite (k_n) ? S'il est vrai que la suite des termes se stabilise (autour de $k = 1,618$ semble-t-il), c'est que $k_{n+1} = k_n$ lorsque *n* devient infiniment grand.

Le saviez-vous ?

Un triangle d'or (ou triangle sublime) est un triangle isocèle dont le côté en double a une longueur dans un rapport avec celle du côté restant égal au nombre d'or.



$$\frac{a}{b} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

6. Suites de Syracuse : Soit la suite (u_n) de premier terme u_1 positif, construite de la manière suivante :
   - si u_n est pair alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$
   - si u_n est impair alors $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

   (1) Calcule les dix premiers termes de la suite si $u_1 = 1$. Est-elle convergente ?

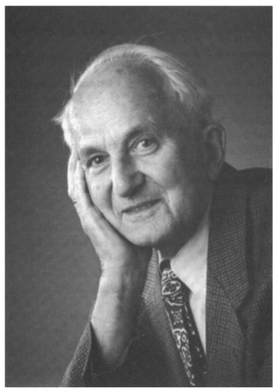
   (2) Calcule les dix premiers termes de la suite si $u_1 = 12$. Est-elle convergente ?

   (3) Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de toutes les suites de Syracuse ?

Le saviez-vous ?

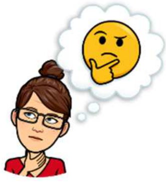
La conjecture de Syracuse est un merveilleux problème d'arithmétique : un enfant de 8 ans peut le comprend*re, les ordinateurs l'ont vérifiée et pourtant les mathématiciens n'ont toujours pas réussi à la démontrer ou à l'infirmer.

Contrairement à ce que laisse supposer son nom, cette conjecture est relativement récente puisqu'elle a été popularisée par la mathématicien allemand Lothar Collatz aux environs de 1937. C'est à la suite d'un exposé à l'université de Syracuse à New York qu'elle a acquis son surnom le plus connu.



7. *Google Form* : « Convergence et croissance de suites »
   https://bit.ly/3A7zcDJ

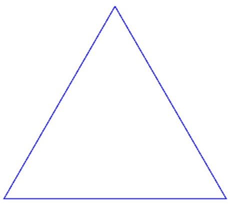
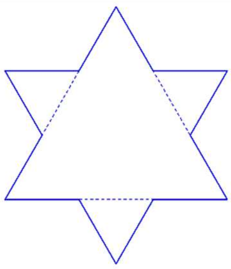
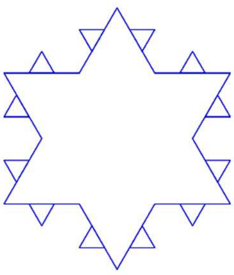
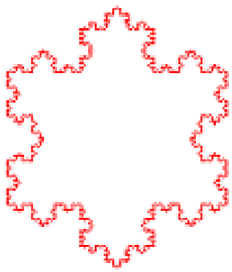
Pour chercher :



1. Que vaut cette somme (si elle existe !) ?

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

2. Les flocons de Von Koch

Etape 1	**Etape 2**
	
Etape 3	**Etape 5**
	

A l'étape 1, la figure F_1 est un triangle équilatéral de coté 1.

A l'étape 2, la figure F_2 s'obtient en divisant en trois chaque côté de la figure F_1, et en substituant au segment central deux segments de même longueur formant avec le segment supprimé un triangle équilatéral placé à l'extérieur.
On réitère le même procédé pour obtenir les figures 3, 4, 5, etc.

L'objet que l'on obtient après une infinité d'itérations s'appelle flocon de Von Koch. C'est un exemple d'objet fractale.

Pour tout entier naturel non nul *n*, on note

- c_n le nombre de côtés de la figure F_n
- l_n la longueur d'un côté de la figure F_n
- p_n le périmètre de la figure F_n
- a_n l'aire de la figure F_n

(1) Question préliminaire : Exprime l'aire d'un triangle équilatéral de côté *x* en fonction de *x*.

(2) Calcule c_1, l_1, p_1 et a_1.

(3) Calcule c_2, l_2, p_2 et a_2.

(4) Exprime c_{n+1} en fonction de c_n ; déduis-en c_n en fonction de *n*.

(5) Exprime l_{n+1} en fonction de l_n ; déduis-en l_n en fonction de *n*.

(6) Déduis des deux questions précédentes une expression de p_n en fonction de *n*. Déduis-en la limite de (p_n).

(7) En remarquant que l'on construit F_{n+1} en « ajoutant » sur chaque côté de F_n un triangle équilatéral de côté l_{n+1}, établis l'égalité : $a_{n+1} - a_n = \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$.

(8) Calcule $(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_2 - a_1)$ et déduis-en une expression de a_n en fonction de *n*.

(9) Donne une valeur approchée de l'aire de la figure F_{10} à 10^{-3} près.

(10) Conjecture la valeur exacte de la limite de (a_n).