

G. Intérêts simples et composés

Si une personne emprunte de l'argent auprès d'un organisme ou d'une autre personne pendant une certaine durée, il est habituellement convenu que lors du remboursement, elle s'acquitte d'une somme supplémentaire proportionnelle à la durée de l'emprunt et au capital prêté : **l'intérêt**. Le coefficient de proportionnalité est le **taux d'intérêt**, habituellement exprimé sous la forme d'un pourcentage.

1. Concept d'intérêt

On dispose au départ, à l'instant $t=0$, d'une somme d'argent d'un montant C_0 . On dépose ce capital à la banque sur un compte d'épargne, en acceptant de s'en dessaisir momentanément et de le prêter à la banque. La théorie financière nous dit qu'on peut agir de la sorte moyennant une rémunération de la part de la banque, appelée intérêt.

On comprend déjà aisément que ce revenu sera d'autant plus important que le montant initialement investi C_0 est élevé et que la durée pendant laquelle l'argent est laissé à la banque est longue.

(1) Unité de temps

On peut choisir différentes unités de temps. En finance, l'unité de base est l'année. On peut toutefois considérer d'autres unités de temps : le semestre, le trimestre, le mois, le jour.

Par exemple, il est courant dans les crédits à la consommation d'évoquer un crédit sur 24 mois. Alors que pour un prêt immobilier, on parlera d'un emprunt sur 20 ans.

(2) Taux d'intérêt

Une fois l'unité de temps choisie, on peut définir le taux d'intérêt i . Celui-ci se rapporte toujours à l'unité de temps. On parle ainsi de taux d'intérêt annuel, mensuel, trimestriel,...

Ce taux sera exprimé par un nombre décimal (par exemple 0,03) ou par un pourcentage (par exemple 3%).

2. Intérêt simple

Un capital prêté ou placé à intérêt simple produit un intérêt proportionnel à son montant et à la durée du prêt ou du placement.

L'intérêt simple concerne essentiellement les opérations à court terme (inférieurs à 1 an).

Considérons un capital C_0 placé au taux i pendant une période déterminée t . Le montant des intérêts I au bout de cette période est donné par la formule $I = C_0 \cdot i \cdot t$.

Si i représente un taux annuel, alors t doit être exprimé en années.

Si i représente un taux semestriel, alors t doit être exprimé en semestres.

Si i représente un taux mensuel, alors t doit être exprimé en mois. Etc.

Pour rappel, l'année compte 365 jours, 52 semaines, 26 quinzaines, 12 mois, 4 trimestres ou 2 semestres. Ainsi, un placement pendant 80 jours correspond à $\frac{80}{365}$ d'année.

Le capital final C_t (ou valeur acquise) est égal au capital initial C_0 augmenté de l'intérêt produit pendant le temps de placement : $C_t = C_0 + C_0 \cdot i \cdot t = C_0 (1 + i \cdot t)$.

Exemple : On dispose d'un capital de 100 € sur un compte d'épargne dont le taux d'intérêt annuel s'élève à 4%.

(1) A combien s'élève, à intérêt simple, le compte après 1 an ?

(2) Après 6 mois ?

En intérêt simple, les intérêts sont constamment calculés sur la somme initialement versée sur le compte ; les intérêts progressivement acquis, eux, ne génèrent pas d'intérêt. La technique de l'intérêt composé va corriger ce défaut.

3. Intérêt composé

Un capital est placé à intérêts composés lorsque le montant des intérêts produits à la fin de chaque période de placement s'ajoute au capital placé pour devenir productif d'intérêts de la période suivante.

L'intérêt composé est généralement appliqué lorsque la durée de placement dépasse un an.

Considérons à cet effet un capital initial C_0 placé à un taux d'intérêt i ; après une période, on a : $C_1 = C_0 \times (1+i)$.

On suppose que ce montant est de nouveau investi pour une période : $C_2 = C_1 \times (1+i) = C_0 \times (1+i) \times (1+i) = C_0 \times (1+i)^2$.

D'une manière générale, après n périodes ($n= 1, 2, 3\dots$), on aura : $C_n = C_0 \times (1+i)^n$.

Le capital final est lié au capital initial par la relation $C_t = C_0 \times (1+i)^t$ dans laquelle C_0 désigne le capital initial, C_t désigne le capital final, t désigne la durée exprimée en nombre de périodes et i désigne le taux d'intérêt périodique.

Exemple : On dispose d'un capital de 100 € sur un compte d'épargne dont le taux d'intérêt annuel s'élève à 4%.

(1) A combien s'élève, à intérêt composé, le compte après 3 ans ?

(2) Après 6 mois ?

8. Pendant combien de mois faut-il placer un capital de 30 000 € à intérêts simples au taux annuel de 8 % pour qu'il rapporte 1200 € ?
9. A quel taux faut-il placer un capital de 20 000 € pendant 8 mois à intérêts simples pour qu'il rapporte 400 € ?
10. Quel capital, placé pendant 8 mois, à intérêts simples au taux de 8 %, rapporte 2 000 € ?
11. A quel taux faut-il placer un capital de 3 000 € pendant 25 ans à intérêts composés pour que la valeur acquise soit de 5 000 € ?
12. Après combien d'années un capital placé à intérêts composés au taux de 5 % double-t-il ?
13. On a placé un capital à intérêts composés pendant 10 ans. Les cinq premières années, le taux était de 3,5 % et les 5 années suivantes de 3 %. La valeur acquise, après 10 ans, s'élève à 11 014,85 €. Détermine le capital initial.
Quel taux unique, appliqué pendant les 10 ans, aurait produit la même valeur acquise ?
14. Deux capitaux dont le montant total est de 70 000 € sont placés, à intérêts composés, pendant 8 ans, le premier à 4,5 % et le second à 3,5 %. Le capital final s'élève à 95 335,38 €. Calcule les deux capitaux.



15. *GOOGLE FORM* : « Intérêts simples et composés »

<https://forms.gle/WUSRdu6AALBEYiku6>



6. Tableau d'amortissement

Un emprunteur s'adresse à un prêteur pour obtenir une somme d'argent (*la dette*) qu'il s'engage à rembourser en versant chaque année, durant n années, une *annuité* au prêteur.

En général, les annuités versées chaque année sont constantes.

- Le prêteur estime que le capital prêté doit lui rapporter un intérêt annuel égal à t % du montant de la dette.
- Ainsi, l'annuité remboursée l'année n est constituée de deux éléments :
 - L'intérêt I_n produit par le capital restant dû.
 - L'amortissement A_n correspondant à la part de capital remboursée. Après versement de l'annuité, la dette est diminuée du montant de l'amortissement.

Exemple : Si la dette se monte à 1 000 € et que le taux d'intérêt est égal à 5 % alors une annuité de 80 € se décompose comme suit :

- Intérêt : 50 € (5 % du montant de la dette)
- Amortissement : 30 € (montant de l'annuité diminué du montant de l'intérêt)

Après le versement de cette annuité, la dette ne s'élève plus qu'à $1\,000\text{€} - 30\text{€} = 970\text{€}$

Mais comment calculer l'annuité ?

Le calcul est complexe mais essentiel, à savoir :

$$\text{Annuité} = \frac{\text{Capital} \times T_1}{1 - (1 + T_1)^{-n}}$$

où T_1 désigne le taux d'intérêt sur une échéance et n désigne le nombre d'échéances.

Exemple : Didier souhaite acquérir une maison. Il décide donc d'emprunter 157 000 € à son banquier préféré. Ce dernier lui propose un taux fixe annuel de 4,5% sur 20 ans, soit 240 mois. Le taux mensuel est donc tout logiquement de : $4,5\% / 12 = 0,375\%$.

La mensualité sera donc de :

$$\text{Mensualité} = \frac{157000 \times 0,375\%}{1 - (1 + 0,375\%)^{-240}} = 993,26 \text{ €}.$$

Une fois cette mensualité calculée *-elle restera fixe durant toute la durée de remboursement de l'emprunt-*, le calcul des premiers intérêts est essentiel. Le premier mois, le taux d'intérêt portera sur la totalité du capital emprunté, soit 157 000 €.

Sur un mois, les intérêts seront donc de : $0,375\% \times 157\,000 = 588,75 \text{ €}$.

Ainsi alors que la mensualité ne sera que de 993,26 €, les intérêts du premier mois représenteront près de 60% de cet amortissement. Une fois l'amortissement connu et le premier intérêt connu, il est possible de calculer le remboursement effectif du capital pour ce premier mois, à savoir : amortissement = mensualité - intérêts, soit $993,26 - 588,75 = 404,51 \text{ €}$.

Au début du second mois, l'emprunteur n'aura donc plus qu'à rembourser : $157\,000 - 404,51 = 156.595,49 \text{ €}$. Tout logiquement, les intérêts du mois 2 se calculeront sur le montant du capital restant dû, soit 156.595,49 €, et non sur les 157.000 €. Le montant des intérêts s'en trouvera donc réduit : intérêts = $156.595,49 \times 0,375\% = 587,23 \text{ €}$.

L'amortissement sera donc de $993,26 - 587,23$, soit **406,03 €**. Plus l'emprunt avance dans le temps, plus le montant des intérêts effectivement versé diminue tous les mois, et la vitesse de remboursement du crédit s'accélère. Autrement dit, la plus grande part des intérêts d'un emprunt sont remboursés dans les premières années de celui-ci.

Pour établir le tableau d'amortissement, il suffit de défiler ainsi jusqu'à la 240^e mensualité. A la dernière mensualité, au 240^e mois, votre capital restant dû sera de 989,24 €. Les intérêts ne représenteront plus que : $989,24 \times 0,375\% = 3,71 \text{ €}$.

La dernière mensualité ne sera pas égale aux autres. Elle se contentera de solder le crédit. Ainsi : Capital restant dû + intérêts = $989,24 + 3,71 = 992,95 \text{ €}$, soit un montant légèrement inférieur à la mensualité de 993,26 €.

Voici les premières lignes du tableau d'amortissement pour cet emprunt :

Période		Capital restant du début de période	Mensualité	Intérêts	Amortissement	Capital restant du fin de période
1ere année	1	157000,00	993,26	588,75	404,51	156595,49
	2	156595,49	993,26	587,23	406,03	156189,46
	3	156189,46	993,26	585,71	407,55	155781,92
	4	155781,92	993,26	584,18	409,08	155372,84
	5	155372,84	993,26	582,65	410,61	154962,23
	6	154962,23	993,26	581,11	412,15	154550,08
	7	154550,08	993,26	579,56	413,70	154136,38
	8	154136,38	993,26	578,01	415,25	153721,13
	9	153721,13	993,26	576,45	416,81	153304,33
	10	153304,33	993,26	574,89	418,37	152885,96
	11	152885,96	993,26	573,32	419,94	152466,02
	12	152466,02	993,26	571,75	421,51	152044,51
2e année	13	152044,51	993,26	570,17	423,09	151621,41
	14	151621,41	993,26	568,58	424,68	151196,74
	15	151196,74	993,26	566,99	426,27	150770,46
	16	150770,46	993,26	565,39	427,87	150342,59
	17	150342,59	993,26	563,78	429,47	149913,12
	18	149913,12	993,26	562,17	431,09	149482,03
	19	149482,03	993,26	560,56	432,70	149049,33
	20	149049,33	993,26	558,93	434,32	148615,01
	21	148615,01	993,26	557,31	435,95	148179,05
	22	148179,05	993,26	555,67	437,59	147741,47
	23	147741,47	993,26	554,03	439,23	147302,24
	24	147302,24	993,26	552,38	440,88	146861,36



Pour comprendre la construction d'un tel tableau avec un tableur, suis ce lien :

<https://bit.ly/3yyUsU9>

Exercices :

1. Une entreprise souhaite acquérir une machine d'un montant de 10 000 €. Pour cela, elle fait un emprunt d'une durée de 40 mois au taux mensuel de 1,2 %. Construis le tableau d'amortissement.

2. Monsieur Duchemin doit rembourser un emprunt de 35 000 € en cinq annuités constantes réglées en fin d'année, au taux annuel de 4 %. Construis le tableau d'amortissement de cet emprunt.