A. Approximation de π

Depuis que l'on s'est rendu compte de l'existence d'une constante définissant le rapport du périmètre d'un cercle sur son diamètre, ce qui se situe à l'époque des Egyptiens et des Babyloniens, les mathématiciens ont tenté de donner une valeur exacte de π et ensuite une valeur approchée, après le 18e siècle.

Une des plus anciennes approximations de π se trouve sur le célèbre papyrus Rhind copié par le scribe Ahmès. En 1800 avant J.-C., l'approximation donnée est alors $\left(\frac{16}{9}\right)^2$, soit 3,16.

Papyrus Rhind

Au 3ème siècle avant J.-C., Archimède avait encadré π par $3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$.

13300 milliards de décimales de π sont connues aujourd'hui. C'est un anonyme dont le pseudo est Houkouonchi qui détient le record depuis octobre 2014. Les méthodes d'approximation ont considérablement évolué et les ordinateurs permettant d'effectuer les calculs se trouvent dans des lieux grands comme plusieurs terrains de tennis.

Si vous êtes plus "lettres" que "nombres", il existe un petit poème qui permet de mémoriser les premières décimales de π .

Que*(3)* j*(1)*'aime*(4)* à*(1)* faire*(5)* apprendre ce nombre utile aux sages !

Immortel Archimède, artiste ingénieur,

Qui de ton jugement peut priser la valeur ?

Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

Jadis, mystérieux, un problème bloquait

Tout l'admirable procédé, l'œuvre grandiose

Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.

Ô quadrature ! Vieux tourment du philosophe

Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez

Défié Pythagore et ses imitateurs.

Comment intégrer l'espace plan circulaire ?

Former un triangle auquel il équivaudra ?

Nouvelle invention : Archimède inscrira

Dedans un hexagone ; appréciera son aire

Fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra :

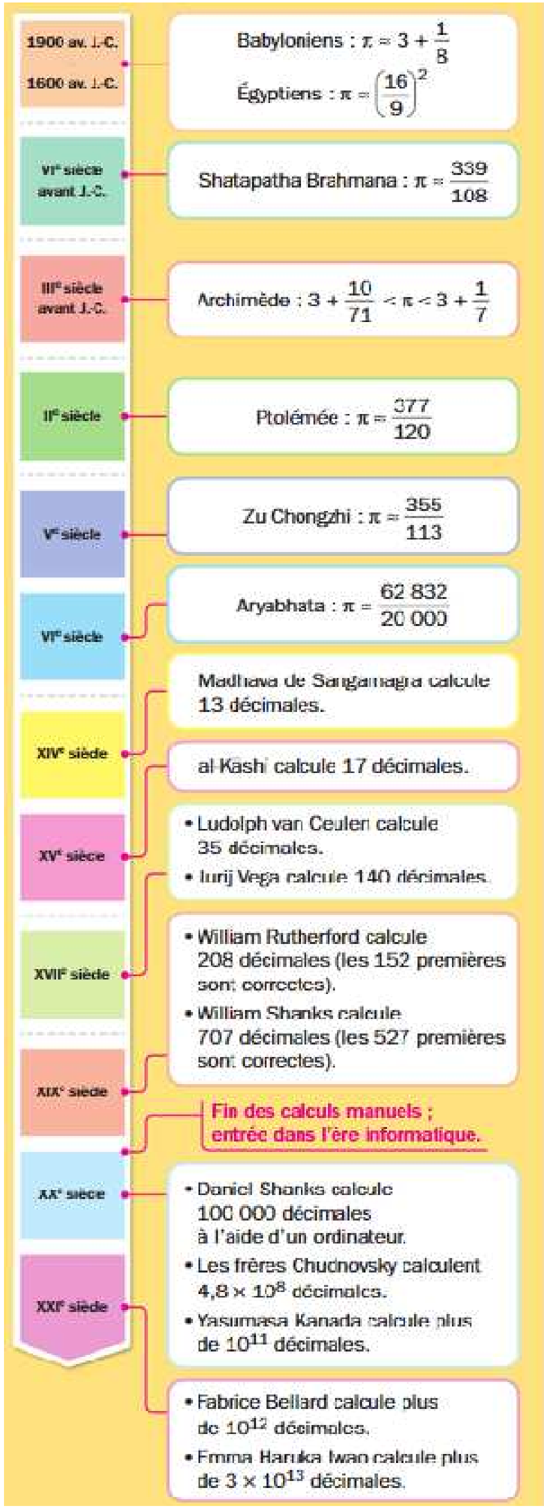
Dédoublera chaque élément antérieur ;

Toujours de l'orbe calculée approchera ;

Définira limite ; enfin, l'arc, le limiteur

De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle

Professeur, enseignez son problème avec zèle.

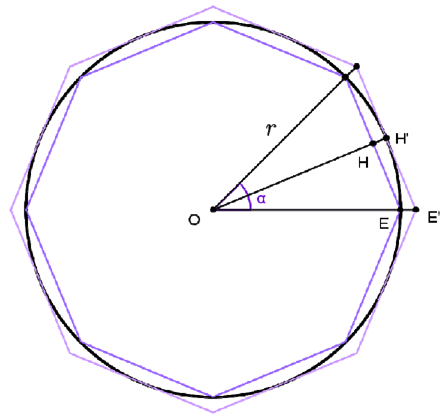


On peut aussi trouver sur internet le club des personnes connaissant par cœur plus de 1000 décimales de π : The 1000-club. Actuellement, le record est détenu par un japonais, *Hiroyuki Goto*, qui connaît 42195 décimales. Vous vous demandez quel est l'intérêt d'accomplir de telles prouesses ... mais pour rien bien sûr ... quand on aime, on "compte" !

Utilisons la méthode d'Archimède pour calculer un encadrement de π.

Pour cela, on trace

- un cercle de rayon r ;
- un polygone régulier inscrit au cercle (les sommets du polygone sont des points du cercle) ;
- un polygone régulier circonscrit au cercle (les côtés du polygone sont tangents au cercle).



Sur la figure ci-contre, ce sont des octogones qui ont été tracés.

On se base ensuite sur deux constatations :

- la circonférence d'un cercle est comprise entre le périmètre d'un polygone inscrit et celui d'un polygone circonscrit à ce cercle ;
- la différence entre ces trois longueurs est d'autant plus petite que le nombre de côtés des polygones est grand.

(1) Quelle est l'amplitude de α ?

(2) Détermine la longueur $\overline{HE}$ et la longueur $\overline{H'E'}$ en fonction du rayon r du cercle et de nombres trigonométriques (bien choisis) de l'angle α.

(3) Détermine une formule qui donne le périmètre des deux octogones en fonction du nombre de côtés, du rayon et de nombres trigonométriques (bien choisis) de α.

(4) Reprends la même démarche pour des polygones réguliers de 16 côtés ; de 32 côtés ; de 64 côtés ; de n côtés.

(5) Indique, dans le tableau suivant, les résultats obtenus pour un cercle de rayon 1.

Nombre de côtés	Périmètre du polygone inscrit	Circonférence du cercle	Périmètre du polygone circonscrit
$n=8$		2π	
$n=16$		2π	
$n=32$		2π	
$n=64$		2π	
$n=360$		2π