UAA 5 : Fonctions trigonométriques
Solutions

B. Radian, arcs et secteurs

4. Exercices

1. Détermine la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de 1,5 radians dans un cercle de 16 cm de diamètre ainsi que l'aire du secteur circulaire déterminé par cet angle.

   $l = r.x \Leftrightarrow l = 8.1,5 = \boxed{12 \text{ cm}}$

   $S = \dfrac{r^2.x}{2} \Leftrightarrow S = \dfrac{8^2.1,5}{2} = \boxed{48 \text{ cm}^2}$

2. Calcule la longueur d'un arc de cercle qui intercepte un angle au centre de 25° et connaissant le rayon du cercle : 12 cm.

   25° correspond à une amplitude de $\dfrac{5\pi}{36}$ radians

   $l = r.x \Leftrightarrow l = \dfrac{5\pi}{36}.12 = \boxed{5,24 \text{ cm}}$

3. Le périmètre d'un cercle est de 52 cm. Détermine la mesure, en degrés, de l'angle au centre qui intercepte un arc de cercle d'une longueur de 7 cm.

   $P = 52 \Leftrightarrow 2\pi r = 52 \Leftrightarrow r = \dfrac{52}{2\pi} = 8,28 \text{ cm}$

   $l = r.x \Leftrightarrow 7 = 8,28.x \Leftrightarrow x = 0,85 \text{ rad}$

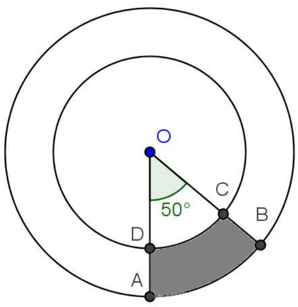
   $$\Leftrightarrow x = 0,85.\frac{180°}{\pi} = \boxed{48,46°}$$

4. L'aire d'un cercle est de 50,2655 cm². Calcule l'aire du secteur circulaire déterminé dans ce cercle par un angle de $\dfrac{\pi}{5}$.

$$Aire\,du\,cercle = 50{,}2655 \Leftrightarrow \pi r^2 = 50{,}2655 \Leftrightarrow r^2 = \frac{50{,}2655}{\pi} = 16 \Leftrightarrow r = 4 \text{ cm}$$

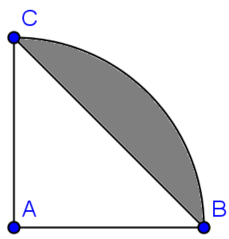
$$S = \frac{r^2.x}{2} \Leftrightarrow S = \frac{4^2.\frac{\pi}{5}}{2} = \boxed{5{,}026 \text{ cm}^2}$$

5. Les deux cercles représentés ont pour rayon 4 et 7 cm. Détermine l'aire de la partie grise.



50° correspond à une amplitude de $50.\frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{18}$ radians.

$$\begin{aligned} Aire\,de\,la\,partie\,grise &= S_{AOB} - S_{DOC} \\ &= \frac{7^2.\frac{5\pi}{18}}{2} - \frac{4^2.\frac{5\pi}{18}}{2} \\ &= 21{,}38 - 6{,}98 \\ &= \boxed{14{,}4 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$



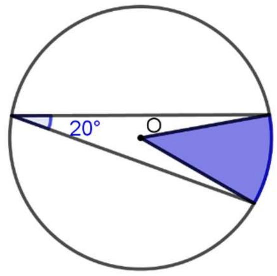
6. Calcule l'aire de la surface grisée dans la figure ci-contre sachant que $\overline{AB} = \overline{AC} = 2$ cm et que l'angle *BAC* est droit.

L'angle droite mesure $90°.\frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{2}$ radians.

$$Surface\ grisée = S_{Secteur} - S_{triangle\,ABC}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2^2.\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{2.2}{2} \\ &= \pi - 2 \\ &= \boxed{1{,}14 \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

7. Soit un cercle de centre *O* et d'un diamètre de 2 m. Détermine l'aire de la zone ombragée.



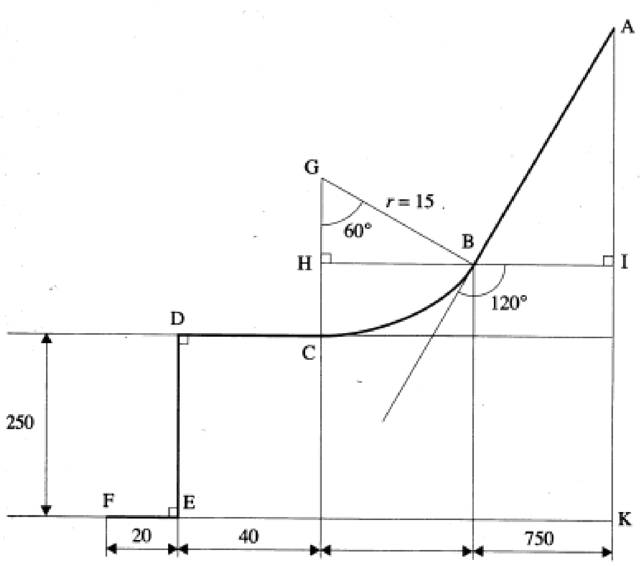
20° correspond à une amplitude de $20.\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{9}$ radians.

L'angle au centre mesure donc $\dfrac{2\pi}{9}$ radians.

$$S=\frac{r^2.x}{2}\Leftrightarrow S=\frac{1^2.\dfrac{2\pi}{9}}{2}=\boxed{0,35\text{ m}^2}$$

Dans un cercle, un angle au centre mesure le double d'un angle inscrit qui intercepte le même arc.

8. Un entrepreneur doit évaluer la longueur des tuyaux de refoulement des eaux suivant le schéma ci-dessous :



Sachant que l'installation comporte un coude en arc de cercle de rayon $r=15\text{ cm}$, calcule la longueur totale de la tuyauterie à installer, en centimètres.

Dans le triangle rectangle AIB, on a $\cos 60°=\dfrac{750}{\overline{AB}}\Leftrightarrow \overline{AB}=\dfrac{750}{\cos 60°}=1500$ cm

60° correspond à une amplitude de $60.\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$ radians.

Ainsi, la longueur de l'arc BC vaut $15.\frac{\pi}{3}=15,71$ cm.

Ainsi, la longueur totale de la tuyauterie

$=\overline{AB}+arc\,BC+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}$

$=1500+15,71+40+250+20$

$=\boxed{1825,71\text{ cm}}$

9. Un secteur circulaire a un rayon de 2 cm. En augmentant le rayon de 3 cm, l'aire du secteur est augmentée de 42 cm². Détermine l'amplitude de l'angle au centre.

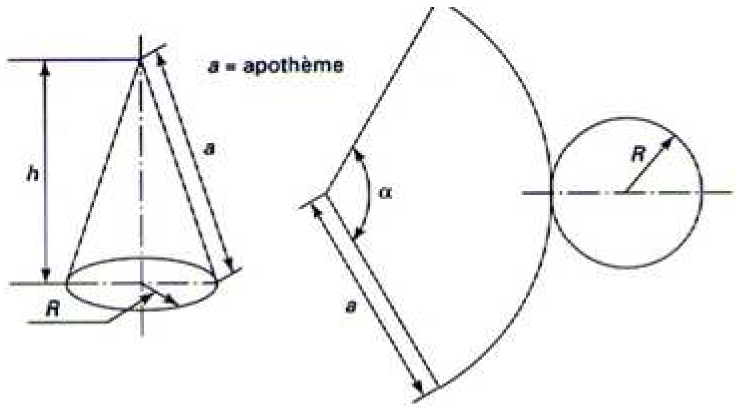
   Soit S_1 l'aire du secteur de rayon 2 cm et soit S_2 l'aire du secteur de rayon 5 cm.

   Soit x l'amplitude l'angle au centre.

   On a $S_1=\frac{2^2.x}{2}=2x$ et $S_2=\frac{5^2.x}{2}=\frac{25x}{2}$

   On a $S_2=S_1+42 \Leftrightarrow \frac{25x}{2}=2x+42 \Leftrightarrow \frac{25x}{2}-2x=42 \Leftrightarrow \frac{21x}{2}=42 \Leftrightarrow x=\frac{42}{\frac{21}{2}}=\boxed{4\text{ rad}}$

10. On considère un cône de rayon 3 cm et de hauteur 4 cm. Le patron d'un cône est un secteur circulaire. Donne une amplitude, en degrés, de l'angle au centre.



Le périmètre de la base du cône est égal à la longueur de l'arc du schéma de droite.

$a=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

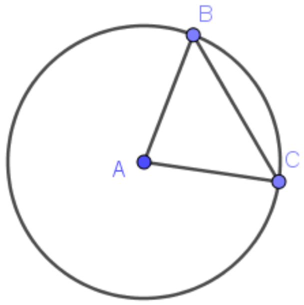
Le périmètre vaut $2gpr=2\pi.3=6\pi$

La longueur de l'arc vaut $l=5.x$

On a donc $6\pi=5x \Leftrightarrow x=\dfrac{6\pi}{5}$

Un angle de $\dfrac{6\pi}{5}$ correspond à un angle $\dfrac{6.180}{5}\boxed{=216°}$

11. Calcule l'aire de la plus petite partie d'un disque de rayon 15 cm comprise entre son cercle et une corde longue de 20 cm.



$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2.\overline{AB}.\overline{AC}.\cos B\hat{A}C$$

$$\Leftrightarrow 20^2=15^2+15^2-2.15.15.\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2.\overline{AB}.\overline{AC}.\cos B\hat{A}C$$

$$\Leftrightarrow 400=225+225-450.\cos B\hat{A}C$$

$$\Leftrightarrow 400-225-225=450.\cos B\hat{A}C$$

$$\Leftrightarrow -50=450.\cos B\hat{A}C$$

$$\Leftrightarrow \cos B\hat{A}C=\frac{-50}{450}$$

$$\Leftrightarrow \cos B\hat{A}C=-\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow B\hat{A}C=1{,}68\,rad$$

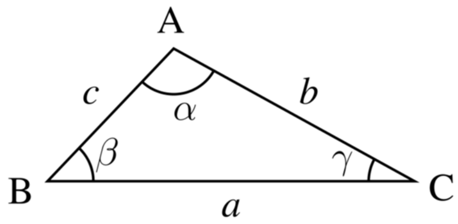
$$Aire\,de\,la\;plus\;petite\;partie=S_{SecteurBAC}-S_{TriangleBAC}$$

$$=\frac{15^2.1{,}68}{2}-\frac{1}{2}.15.15.\sin 1{,}68$$

$$=189{,}24-111{,}8$$

$$\boxed{=77{,}43\,cm^2}$$

Pour rappel :



Loi des cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\gamma$$

Aire d'un triangle

$$S = \frac{1}{2}.a.b.\sin\gamma$$

$$S = \frac{1}{2}.a.c.\sin\beta$$

$$S = \frac{1}{2}.b.c.\sin\alpha$$