

UAA 5 : Fonctions trigonométriques

Solutions

F. Formules d'addition, de duplication, de Carnot et de Simpson

5. Exercices



Tous les exercices sont à faire sans calculatrice !

1. Calcule la valeur exacte des nombres suivants :

$$(1) \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$(2) \cos \frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$(3) \tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = 2 + \sqrt{3}$$

$$(4) \sin 435^\circ = \sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$(5) \tan \frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = -2 - \sqrt{3}$$

2. Calcule $\tan(a+b)$ sachant que $\tan a = \frac{1}{2}$ et $\tan b = \frac{1}{3}$ ($0 < a < \frac{\pi}{2}, 0 < b < \frac{\pi}{2}$).

Déduis-en la valeur de l'angle $a+b$.

$$\tan(a+b) = 1$$

a et b appartiennent au premier quadrant. Leur somme peut appartenir au 1^{er} ou 2^e quadrant. Comme la tangente de $a+b$ est de signe positif, on en déduit que $a+b = \frac{\pi}{4}$.

3. Calcule $\tan(a+b)$ sachant que $\tan a = \frac{n}{n+1}$ et $\tan b = \frac{1}{2n+1}$.

$$\tan(a+b) = 1$$

4. Calcule les nombres trigonométriques de $a+b$ sachant que $\sin a = \frac{12}{13}$, $a \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$,

$$\cos b = -\frac{4}{5} \text{ et } b \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right].$$

$$\sin(a+b) = -\frac{33}{65}$$

$$\cos(a+b) = \frac{56}{65}$$

$$\tan(a+b) = -\frac{33}{56}$$

$$\cot(a+b) = -\frac{56}{33}$$

5. On donne $\sin a = \frac{3}{5}$ ($0 < a < \frac{\pi}{2}$).

(1) Calcule $\sin 2a$, $\cos 2a$ et $\tan 2a$.

$$\sin(2a) = \frac{24}{25} \quad \cos(2a) = \frac{7}{25} \quad \tan(2a) = \frac{24}{7}$$

(2) A quel quadrant appartient $2a$? Justifie ta réponse.

Comme les trois nombres trigonométriques recherchés sont positifs, on en déduit que $2a$ appartient au 1^{er} quadrant.

6. Calcule $\sin 2a$, $\cos 2a$ et $\tan 2a$ sachant que $\tan a = \frac{5}{3}$ et que $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$.

$$\sin(2a) = \frac{15}{17} \quad \cos(2a) = -\frac{8}{17} \quad \tan(2a) = -\frac{15}{8}$$

7. Vérifie les identités trigonométriques suivantes :

$$(1) (\sin a + \sin b)^2 + (\cos a + \cos b)^2 = 2 + 2\cos(a - b)$$

$$(2) \sin a \cdot \cos a - \sin b \cdot \cos b = \cos(a + b) \cdot \sin(a - b)$$

$$(3) \cos^4 a - \sin^4 a = \cos 2a$$

$$(4) \cos 2a \cdot (1 + \tan a \cdot \tan 2a) = 1$$

$$(5) \frac{1 - \tan a \cdot \cot 2a}{1 + \tan a \cdot \cot 2a} = \frac{\sin a}{\sin 3a}$$

$$(6) \sin 2a + 2 \cdot \sin 4a + \sin 6a = 4 \cdot \sin 4a \cdot \cos^2 a$$

$$(7) \cos 2a + \cos 4a + \cos 6a = \cos 4a \cdot (2 \cos a + 1) \cdot (2 \cos a - 1)$$

$$(8) \sin 5a \cdot \sin a = \sin^2 3a - \sin^2 2a$$

$$(9) \frac{\sin 5a + \sin 3a}{\cos 3a + \cos a} = 2 \sin 2a$$

$$(10) \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4 \quad (ULB, 2012)$$