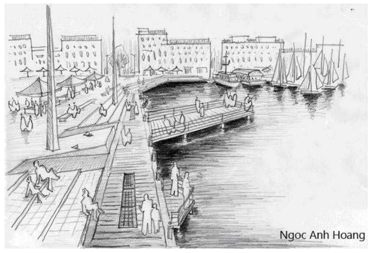
H. Problèmes

https://bit.ly/3EGIlow

1. Entrée au port



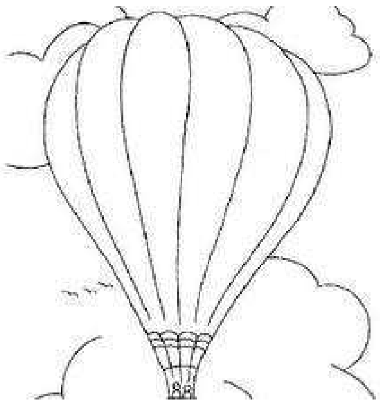
Dans le port, la hauteur h de l'eau varie avec les marées. Hier, cette hauteur a pu être modélisée par la fonction $h(t) = 2{,}5.\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 5$.

La hauteur h est exprimée en mètres et t est le nombre d'heures après minuit.

(1) Une jauge à l'entrée du port indique le niveau de l'eau. A quelles heures le niveau de l'eau avait-il atteint 4 m ?

(2) Un bateau ne peut rentrer au port ou en sortir que si le niveau d'eau est supérieur à 6 m. De combien de temps disposait-il dans la journée d'hier pour effectuer l'une de ces manœuvres ?

2. Altitude d'une montgolfière

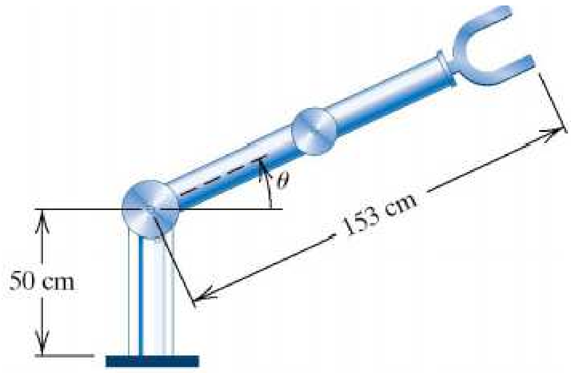


Aurore et Pierre observent l'envol d'une montgolfière à bord de laquelle se trouve l'un de leurs copains. Aurore et Pierre se sont placés à 100 m du point d'envol et la montgolfière s'est élevée verticalement. Lorsque le bas de la nacelle est à 50 m d'altitude, ils l'aperçoivent sous un angle α. Le ballon poursuit son ascension verticale.

De combien de mètres a-t-il progressé lorsqu'ils voient le bas de la nacelle sous un angle 2α ? On suppose que les yeux des observateurs sont situés à 1,60 m du sol.

3. Les fonctions trigonométriques pour la conception de robots industriels

Supposons que l'articulation de l'épaule d'un robot soit motorisée de façon à ce que l'angle θ augmente à une vitesse constante de $\frac{\pi}{12}$ radians par seconde à partir d'un angle initial $\theta = 0$. Supposons que l'articulation du coude est maintenue rigide et que le bras a une longueur constante de 153 centimètres, comme sur la figure.



(1) Suppose que $h = 50$ cm si $\theta = 0$. Construis le tableau de valeur de la hauteur H de la main du robot et de l'angle θ , en fonction du temps, chaque seconde, lorsque $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Déduis-en une expression de $H(t)$, représentant la hauteur de la main du robot en fonction du temps t (en secondes).

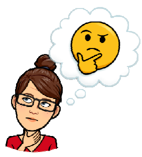
(2) Après combien de temps, entre 0 et 6 secondes, la hauteur de la main est-elle de 170 cm ?

(3) Détermine la distance totale parcourue par la main entre $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

4. Chaud et froid

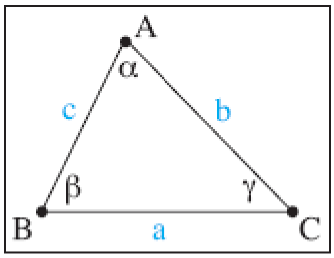
L'ensemble des relevés de température au cours d'une journée se prête parfois à une modélisation par une fonction de la forme $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + b$, dans laquelle t est le temps exprimé en heures et $f(t)$ la température en degrés Celsius. Dans ce cas, minuit correspond à $t = 0$ et on suppose que la température décroît dans les premières heures des relevés.

1. Quelle est la fonction qui modélise l'évolution de la température d'une journée durant laquelle le maximum est de 10°C et le minimum, atteint à 3 h, est de -2°C ?
2. Quelle était la température à minuit ?
3. Pendant combien de temps a-t-il gelé ?
4. Pendant quelles périodes de la journée a-t-on eu une température supérieure à 8°C ?



Pour chercher :

La formule de Mollweide est parfois utilisée en trigonométrie pour vérifier les solutions d'un triangle car elle implique les six éléments d'un triangle : les trois angles et les longueurs des trois côtés :



$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma}{2}}.$$

a. (1) Grâce à la loi des sinus, montre que $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma}$.

(2) Achève ensuite la démonstration de la formule de Mollweide.

b. Voici une autre formule de Mollweide. Démontre-la !

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$$