FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Utilisation des formules

(addition, duplication, Carnot et Simpson)

C. SCOLAS

https://bit.ly/4grikwQ

1. Calcule la valeur exacte (contenant des racines carrées) des expressions suivantes, sans utiliser la calculatrice :

(1) $\cos 75° = \cos(30°+45°)$

$= \cos 30° . \cos 45° - \sin 30° . \sin 45°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\sin 165° = \sin(180°-15°)$; $\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$

$= \sin 15°$

$= \sin(45°-30°)$

$= \sin 45° . \cos 30° - \sin 30° . \cos 45°$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(3) $\sin 10° . \cos 20° + \sin 20° . \cos 10°$; $\sin a . \cos b + \sin b . \cos a = \sin(a+b)$

$= \sin(30°)$

$= \frac{1}{2}$

(4) $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{3} . \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} . \sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2. En utilisant une des formules d'addition, montre que $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$.

$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x . \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} \cdot \cos x$

$= -\cos x$

3. Calcule $\sin(a-b)$, sachant que a et b sont deux angles aigus et que $\cos a = \frac{4}{5}$ et $\cos b = \frac{3}{5}$.

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$\sin^2 a + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

$\sin^2 a + \frac{16}{25} = 1$

$\sin^2 a = 1 - \frac{16}{25}$

$\sin^2 a = \frac{9}{25}$

$\sin a = \pm \frac{3}{5}$

$-$ à rejeter car a est aigu

$\sin^2 b + \cos^2 b = 1$

$\sin^2 b + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$

$\sin^2 b + \frac{9}{25} = 1$

$\sin^2 b = 1 - \frac{9}{25}$

$\sin^2 b = \frac{16}{25}$

$\sin b = \pm \frac{4}{5}$

$-$ à rejeter car b est aigu

$\Rightarrow \sin(a-b) = \sin a . \cos b - \sin b . \cos a$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = \frac{-7}{25}$

4. Sachant que $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ et que $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{3}{5}$, détermine la valeur exacte de $\tan\beta$.

$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta}{\cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta} = \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{\cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta}{\cos\alpha . \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta}{\cos\alpha . \cos\beta}} = \frac{3}{5}$

En s'inspirant de la démonstration de $\tan(a-b)$, on divise le numérateur et le dénominateur par $\cos\alpha . \cos\beta$.

$\Leftrightarrow \frac{1 + \tan\alpha . \tan\beta}{1 - \tan\alpha . \tan\beta} = \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{1 + \frac{1}{2} . \tan\beta}{1 - \frac{1}{2} . \tan\beta} = \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow 5 . \left(1 + \frac{1}{2} . \tan\beta\right) = 3 . \left(1 - \frac{1}{2} \tan\beta\right)$

$\Leftrightarrow 5 + \frac{5}{2} \tan\beta = 3 - \frac{3}{2} \tan\beta$

$\Leftrightarrow 4 \tan\beta = -2$

$\Leftrightarrow \tan\beta = -\frac{1}{2}$

5. x est un angle appartenant à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$. On donne $\cos x = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, calcule $\cos(2x)$ et déduis-en la valeur de $2x$.

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$= 2.\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 - 1$$

$$= 2.\ \frac{2+\sqrt{3}}{4} - 1$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{11\pi}{6} \quad \text{car } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \text{ càd } \pi \leq 2x \leq 2\pi.$$

6. On donne $\cos 2a = \frac{2}{3}$ (avec $\frac{\pi}{2} \leq a \leq \pi$). Calcule $\sin a$.

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

$$= \frac{1-2/3}{2}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$\rightarrow \sin a = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$ à rejeter car $a \in [\frac{\pi}{2};\pi]$ et le sinus d'un angle du 3^e quadrant est positif.

$\Rightarrow \sin a = \frac{\sqrt{6}}{6}$

7. Démontre les identités suivantes :

(1) $\sin(2\alpha) - \tan\alpha.\cos(2\alpha) = \tan\alpha$

$\sin 2a - \frac{\sin a}{\cos a}.\cos(2a) = \frac{\sin a}{\cos a}$ ↓ on met au même dénominateur

$\sin 2a.\cos a - \sin a.\cos 2a = \frac{\sin a}{\cancel{\cos a}}.\cancel{\cos a}$ ↓ formule d'addition

$\sin(2a-a) = \sin a$

$\sin a = \sin a$

(2) $\sin 5a . \sin a = \sin^2 3a - \sin^2 2a$

$\sin 5a . \sin a = (\sin 3a - \sin 2a) . (\sin 3a + \sin 2a)$

$= 2 . \sin\left(\frac{3a-2a}{2}\right) . \cos\left(\frac{3a+2a}{2}\right) . \ 2 \sin\left(\frac{3a+2a}{2}\right) . \cos\left(\frac{3a-2a}{2}\right)$

$= 2 . \sin \frac{a}{2} . \cos \frac{5a}{2} . \ 2 . \sin \frac{5a}{2} . \cos \frac{a}{2}$

$= 2 . \sin \frac{a}{2} . \cos \frac{a}{2} . \ 2 . \sin \frac{5a}{2} . \cos \frac{5a}{2}$ $\quad 2 . \sin a . \cos a = \sin(2a)$

$= \sin a . \cos 5a$

(3) $\dfrac{\sin a + \sin 2a + \sin 3a}{\cos a + \cos 2a + \cos 3a} = \tan 2a$

$\dfrac{2 . \sin\left(\frac{a+3a}{2}\right) . \cos\left(\frac{a-3a}{2}\right) + \sin 2a}{2 . \cos\left(\frac{a+3a}{2}\right) . \cos\left(\frac{a-3a}{2}\right) + \cos 2a} = \tan 2a$

$\dfrac{2 . \sin 2a . \cos(-a) + \sin 2a}{2 . \cos 2a . \cos(-a) + \cos 2a} = \tan 2a$ $\quad \cos(-a) = \cos a$

$\dfrac{\sin 2a . \cancel{(2\cos a + 1)}}{\cos 2a . \cancel{(2\cos a + 1)}} = \tan 2a$

$\tan 2a = \tan 2a$

(4) $\dfrac{\sin 3a}{\sin a} - \dfrac{\cos 3a}{\cos a} = 2$

$\dfrac{\sin 3a . \cos a - \cos 3a . \sin a}{\sin a . \cos a} = 2$ $\quad$ Ⓝ formules de Simpson inversées

$\dfrac{\frac{1}{2}(\sin(3a+a) + \sin(3a-a)) - \frac{1}{2}(\sin(a+3a) + \sin(a-3a))}{\sin a . \cos a} = 2$

$\dfrac{\frac{1}{2}(\sin 4a + \sin 2a) - \frac{1}{2}(\sin 4a + \overbrace{\sin(-2a)}^{= -\sin 2a})}{\sin a . \cos a} = 2$

$\dfrac{\frac{1}{2}\sin 4a + \frac{1}{2}\sin 2a - \frac{1}{2}\sin 4a + \frac{1}{2}\sin 2a}{\sin a . \cos a} = 2$

$\dfrac{\sin 2a}{\sin a . \cos a} = 2$

$\dfrac{2 . \cancel{\sin a} . \cancel{\cos a}}{\cancel{\sin a} . \cancel{\cos a}} = 2$

Simpson: $\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}$

$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}$

(5) $\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \dfrac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}$

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\dfrac{\sin(a+b)}{\cancel{\cos a \cdot \cos b}}}{\dfrac{\sin(a-b)}{\cancel{\cos a \cdot \cos b}}}$$

(6) $\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b} + \dfrac{\sin(b-c)}{\cos b.\cos c} + \dfrac{\sin(c-a)}{\cos a.\cos c} = 0$

$$\frac{\sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin b \cdot \cos c - \sin c \cdot \cos b}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin c \cdot \cos a - \sin a \cdot \cos c}{\cos a \cdot \cos c} = 0$$

$$\frac{\sin a \cancel{\cos b}}{\cos a \cdot \cancel{\cos b}} - \frac{\sin b \cdot \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a} \cdot \cos b} + \frac{\sin b \cancel{\cos c}}{\cos b \cancel{\cos c}} - \frac{\sin c \cdot \cancel{\cos b}}{\cancel{\cos b} \cdot \cos c} + \frac{\sin c \cdot \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a} \cdot \cos c} - \frac{\sin a \cancel{\cos c}}{\cos a \cancel{\cos c}} = 0$$

$$\tan a - \tan b + \tan b - \tan c + \tan c - \tan a = 0$$