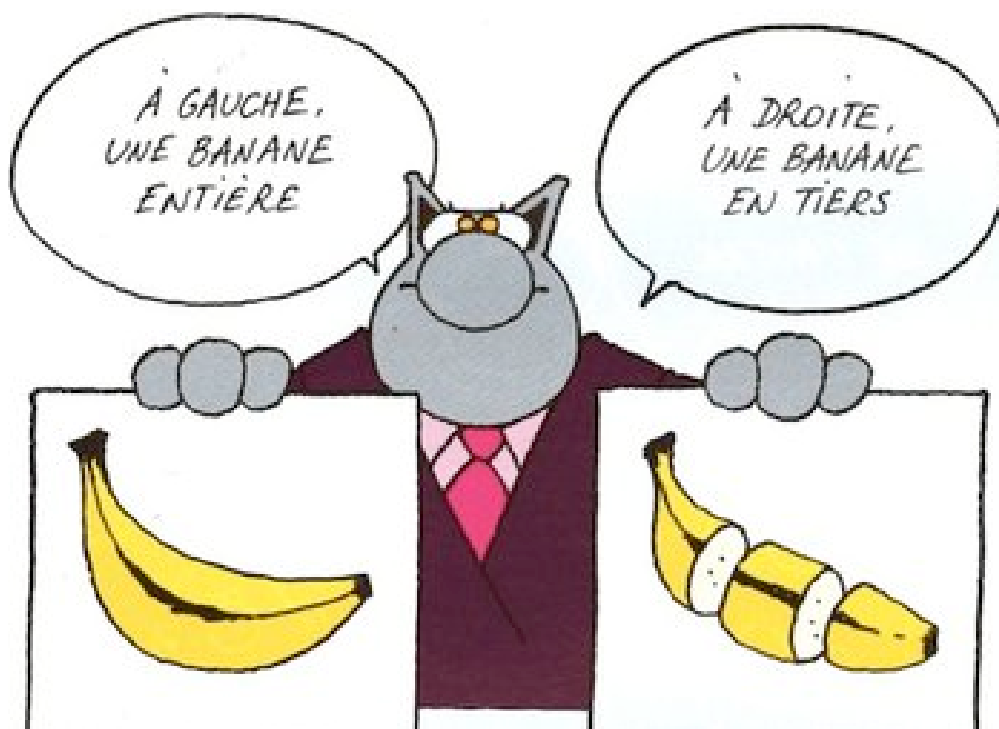


# Fractions algébriques



## A. Rappels

Une fraction **existe** à condition que son dénominateur soit différent de zéro.

Pour **additionner** ou **soustraire** deux fractions, il faut les mettre au même dénominateur :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \text{ et } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

Pour **multiplier** des fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

On peut, quand c'est possible évidemment, procéder à des simplifications entre n'importe quel facteur du numérateur et n'importe quel autre facteur du dénominateur.

Exemple :  $\frac{3}{8} * \frac{12}{25} = \frac{3}{\cancel{8}^2} * \frac{\cancel{12}^3}{25} = \frac{3 * 3}{2 * 25} = \frac{9}{50}$

Pour la **division**, il faut absolument savoir sur le bout des doigts, et sans faire aucun effort, ces trois opérations :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$$

On ne peut **simplifier** une fraction que si le numérateur et le dénominateur sont des produits et qu'ils possèdent un facteur commun. Dans ce cas, il faut préciser les **conditions de simplification**.

Ainsi, on cherchera parfois à factoriser les expressions algébriques pour pouvoir simplifier les fractions. On pensera dès lors aux méthodes de factorisation que sont la mise en évidence, les produits remarquables<sup>1</sup>, la factorisation du second degré<sup>2</sup> et la méthode d'Hörner.

La méthode d'Hörner permet de factoriser des polynômes de degré supérieur à 2. Mais elle suppose que l'on connaisse une racine du polynôme.

A noter que cette racine est nécessairement un diviseur du terme indépendant. Ainsi, si le terme indépendant est 6, le polynôme admettra comme **racine entière éventuelle** un diviseur de 6 :  $\pm 1$ ;  $\pm 2$ ;  $\pm 3$  ou  $\pm 6$ .

Si  $a$  est une racine du polynôme  $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ , alors ce polynôme se factorise en une expression de la forme  $P(x) = (x - a) \cdot P'(x)$  où  $P'(x)$  est un polynôme d'un degré inférieur à celui du degré de  $P(x)$  :

$$P'(x) = b_{n-1} \cdot x^{n-1} + b_{n-2} \cdot x^{n-2} + b_{n-3} \cdot x^{n-3} + \dots + b_0.$$

Illustrons la méthode d'Hörner :

Exemple : Factorisons le polynôme  $2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ .

---

<sup>1</sup> Carré d'une somme :  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Carré d'une différence :  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Binôme conjugué :  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

<sup>2</sup> Si  $\Delta > 0$ ,  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

Si  $\Delta = 0$ ,  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ .

Et si  $\Delta < 0$ , le trinôme ne se factorise pas.

Exemple : Factorisons le polynôme  $x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6$ .

Remarque :

Dans les fractions de fractions, il est convenu que la place et la taille de la barre de fraction sont importantes.

On écrit  $\frac{\frac{1+a}{2} + 3}{4 + \frac{5}{6} + a}$  plutôt que  $\frac{\frac{1+a}{2} + 3}{4 + \frac{\frac{5+a}{6}}{1}}$ .

Rappels :

Les propriétés des puissances vues pour les exposants entiers sont étendues (et admises) pour les exposants fractionnaires :

Soit  $m, n \in \mathbb{Q}_0$  et  $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ ,

- $a^m \cdot a^n = \dots$
- $\frac{a^m}{a^n} = \dots$
- $(a^m)^n = \dots$
- $(a \cdot b)^m = \dots$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \dots$
- $1^n = \dots$

- $a^0 = \dots$
- $a^{-n} = \dots$
- $a^{-1} = \dots$

Enfin, soit  $m \in \mathbb{Z}_0$  et  $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ , on a  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  pour autant que l'expression soit définie.

## B. Exercices

### Exercices :

1. Réduis les fractions au même dénominateur (sans préciser les conditions d'existence<sup>3</sup>) :

#### SERIE 1

$$(1) \frac{a}{2} + \frac{a}{3} =$$

$$(2) \frac{a}{3} - a =$$

$$(3) \frac{-6}{5a} : \frac{7}{15a^2} =$$

$$(4) \frac{2}{a^2} + \frac{5}{a} =$$

$$(5) \frac{3a}{x^3} + \frac{2b}{x^2} =$$

$$(6) \frac{3c}{4a} + \frac{5a}{6b} =$$

$$(7) \frac{5}{6a^3} + \frac{7}{9a^2} =$$

$$(8) \frac{2}{ab^2} + \frac{3}{a^2b} =$$

$$(9) \frac{\frac{a^2b}{2x}}{\frac{4a}{xy}} =$$

---

<sup>3</sup> Après avoir précisé les conditions d'existence, on cherchera à résoudre une équation. Cette étape fait partie d'un autre chapitre.

## **SERIE 2**

$$(1) \quad 3 - \frac{b}{a-b} - \frac{a}{b-a} =$$

$$(2) \quad \frac{2}{(a-2)(a+3)} + \frac{5}{a.(a-2)} =$$

$$(3) \quad \frac{1}{a^2(a-1)} + \frac{3}{a^3(a-1)} =$$

$$(4) \quad \frac{a}{a^2-b^2} + \frac{b}{a-b} =$$

$$(5) \quad \frac{2}{a^2+ab} + \frac{5}{ab+b^2} =$$

$$(6) \quad \frac{2x}{x^2-4} + \frac{3x}{2x+4} =$$

$$(7) \quad \frac{x}{x^2-1} + \frac{5}{x^2-2x+1} =$$

$$(8) \quad \frac{3y}{x^2-xy} + \frac{2x}{y^2-xy} =$$

$$(9) \quad \frac{7a}{2a-4b} + \frac{5b}{6b-3a} =$$

2. Ecris sous forme d'une puissance de  $a$  les expressions suivantes (toutes sensées être définies) ; donne ensuite une réponse sans exposant fractionnaire, ni négatif.

$$(1) \quad a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{3}{4}}$$

$$(2) \quad \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$(3) a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^2$$

$$(4) \left( \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(5) a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$$

$$(6) \left( a^{\frac{1}{4}} \right)^{-2} \cdot \left( a^{\frac{3}{4}} \right)^{-1}$$

$$(7) \frac{\left( a^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{1}{2}}}$$

3. Utilise les exposants fractionnaires pour simplifier les expressions suivantes ; donne ensuite une réponse sans exposant fractionnaire, ni négatif.

**SERIE 1**

$$(1) \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a}$$

$$(2) \sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a}$$

$$(3) \frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt[6]{a^5}}$$

$$(4) \frac{\sqrt[7]{a^4} \left( \sqrt[3]{a^5} \right)}{\sqrt{a^3}}$$

$$(5) \frac{\sqrt[5]{a^2} a^3}{a^2}$$

$$(6) \sqrt[3]{a\sqrt{a}}$$

$$(7) \sqrt{\sqrt[3]{27a^{12}}}$$

$$(8) \sqrt{a^3 \sqrt{a^2} \sqrt{a}}$$

**SERIE 2**

$$(1) \frac{3a^{-5} (3a^{-3})^4 a^3}{9a^3 \sqrt{a^2}} =$$

$$(2) \frac{\sqrt[3]{a} \sqrt[4]{a} \sqrt[5]{a}}{\sqrt[6]{a} \sqrt[7]{a} a^{\frac{1}{8}}} =$$

$$(3) \frac{9a^{-3} a^{\frac{2}{3}} (3a^{-1})^{-5}}{81 \sqrt[5]{a^4} \sqrt{a^5}} =$$

$$(4) \frac{9a^{-1} (9a^{-2})^{-3} 3^3 a^{\frac{1}{2}}}{27^{-1} a^{-\frac{3}{2}} \sqrt{a^3}} =$$

4. Simplifie les fractions suivantes (sans préciser les conditions d'existence et de simplification) :

**SERIE 1**

$$(1) \frac{5a}{c} \cdot \frac{3b}{4a} =$$

$$(2) \frac{6a^3 b^2 c}{4a^2 b^2 c^5} =$$

$$(3) \frac{3ab}{-5c} \times \frac{20b^3 c^2}{9a^2} \times \frac{-a}{2b^2 c} =$$

$$(4) \frac{(a^3 b^{-3})^2 a}{a^{-4} b^2} =$$

$$(5) \frac{a-b}{b-a} =$$



## **SERIE 2**

$$(1) \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{a^2} \right) : \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$(2) \frac{a^2 - b^2}{a - b} =$$

$$(3) \frac{a^2 - b^2}{a} \times \frac{a^2 b}{a^2 + 2ab + b^2} =$$

$$(4) \frac{2}{a} - \frac{3}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)} =$$

$$(5) \frac{3}{a-2} + \frac{5}{4-2a} =$$

$$(6) \left( \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \times \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \times \left( \frac{ab}{a+b} \right) =$$

$$(7) \frac{1}{a-1} + \frac{3a-1}{a^2-1} =$$

$$(8) \frac{2-5a}{5a} - \frac{4}{a^2} =$$

$$(9) \frac{4a^2}{2a-6a^2} =$$

$$(10) \frac{3a^2 - ab}{6ab - 2b^2} =$$

$$(11) \frac{32-2a^2}{3a-12} =$$

$$(12) \frac{3a^2 - a^3}{3a^2 - 27} =$$

$$(13) \frac{a^2 - 9}{a^2 + 4a + 3}$$

$$(14) \frac{a^3 + a^2 - 2a}{a^4 - a^3 - 6a^2}$$

$$(15) \frac{a^3 - 6a^2 + 8a}{a^2 - 3a - 4}$$

$$(16) \frac{a^2 - 7a + 10}{a^3 + 4a^2 - 12a}$$

$$(17) \frac{2a^2 + 6a + 4}{a^3 + a^2 - 3a - 3}$$

$$(18) \frac{3a^3 - 7a^2 - 11a + 15}{5a^3 - 2a^2 - 33a - 18}$$

### **SERIE 3**

$$(1) \frac{1}{1 + \frac{3}{a}} + \frac{1}{\frac{a}{3} - 1} - \frac{2}{\frac{a}{3} - \frac{3}{a}} =$$

$$(2) \frac{\frac{2a+b}{a+b} - 1}{1 - \frac{a}{a+b}} =$$

$$(3) \frac{\frac{1+a^2}{a} - 2}{1 - \frac{1}{a}} =$$

$$(4) \frac{1 - \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a^2}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{a}} =$$

$$(5) \frac{\frac{2}{a} - \frac{2}{3a}}{\frac{1}{a} - \frac{5}{6a}} =$$

$$(6) \frac{\frac{1}{3a} - \frac{1}{3b}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} =$$

$$(7) \frac{1 + \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a^2}} =$$

$$(8) \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + a}}} =$$

$$(9) \frac{\frac{a-b}{b-c} - \frac{b-c}{a-b}}{\frac{a-b-1}{b-c-1} - \frac{b-c}{a-b}} =$$

$$(10) \frac{\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+2}}{\frac{15a+3}{a^2-1}} =$$

$$(11) \frac{\frac{1}{a} + a + 2}{\frac{1}{a^2}} \times \frac{1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}}{1 + \frac{1}{a^2}} =$$

$$(12) \frac{\frac{a+2}{b}}{\frac{a^2-4}{a^2b}} =$$

$$(13) \frac{x^2 + 2xy}{y} : (x^2 - 4y^2) =$$

$$(14) \left( \frac{3}{x} - \frac{2}{x+1} \right) \left( \frac{3}{x} - \frac{2}{x-1} \right) =$$

$$(15) \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \times \frac{a+b}{a-b} =$$

$$(16) \left( \frac{a^3 - ab^2 + b^3}{(a-b)^3} - \frac{b}{a-b} \right) \left( \frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{a^2 - ab + b^2} - \frac{b}{a} \right) =$$

5. Parmi les expressions suivantes supposées définies, une seule est égale à

$$\frac{1}{(x-y)(y-z)} - \frac{1}{(y-z)(z-x)} - \frac{1}{(z-x)(x-y)}. \text{ Laquelle ?}$$

A :  $\frac{y+z}{(x-z)(y-z)(z-x)}$

B :  $\frac{2}{(x-z)(y-z)}$

C : 0

D :  $\frac{x+z}{(x-z)(y-z)(z-x)}$

(Concours d'entrée et d'accès en sciences médicales et sciences dentaires, 2018)

6. Parmi les expressions suivantes (supposées définies), quelle est celle qui est égale à

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-4x+4} - \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-x-2} \text{ quel que soit } x ?$$

A :  $\frac{5}{2-x}$

B :  $\frac{5}{x-2}$

C :  $\frac{1}{2-x}$

D :  $\frac{2x-1}{x-2}$

(Concours d'entrée et d'accès en sciences médicales et sciences dentaires, 2015)

7. Soient  $a, b, c, d$  des nombres strictement positifs. Parmi les propositions suivantes,

supposées définies, laquelle est égale à l'opposé de l'inverse de  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$  ?

A :  $\frac{bd}{bc-ad}$

B :  $\frac{bd}{ad-bc}$

C :  $\frac{bc-ad}{bd}$

D :  $\frac{ad-bc}{bd}$

(Concours d'entrée et d'accès en sciences médicales et sciences dentaires, 2015)

Le saviez-vous ?



Le mathématicien hongrois Paul Erdos (1913-1996) a émis la conjecture suivante :

« Tout nombre rationnel de la forme  $\frac{4}{n}$ ,  $n$  étant un entier supérieur ou égal à 2, peut être écrit comme somme de trois fractions unitaires, c'est-à-dire qu'il existe trois entiers naturels non nuls  $x, y, z$  tels que  $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ .

La conjecture de Paul Erdos n'est toujours pas démontrée en 2025...

