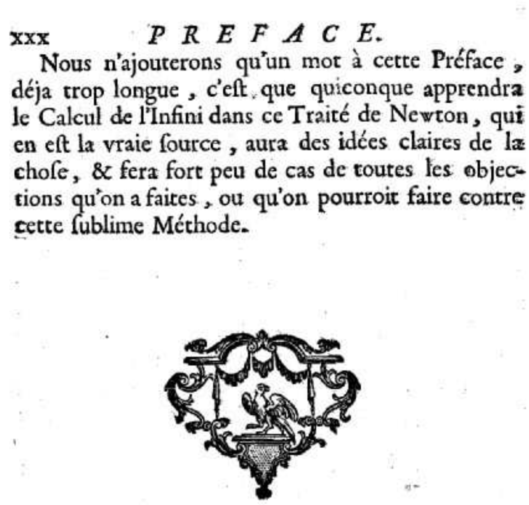
UAA 3 :

Calcul intégral

LA
METHODE
DES
FLUXIONS,
ET DES SUITES INFINIES.
Par M. le Chevalier NEWTON.
Traduit en françois par m. de Buffon intend. du jardin du Roy.
A PARIS,
Chez DE BURE l'aîné, Libraire, Quay des Auguſtins, à Saint Paul.
M. DCC XL.



xxx *PREFACE.*

Nous n'ajouterons qu'un mot à cette Préface, déja trop longue, c'eſt que quiconque apprendra le Calcul de l'Infini dans ce Traité de Newton, qui en eſt la vraie ſource, aura des idées claires de la choſe, & fera fort peu de cas de toutes les objections qu'on a faites, ou qu'on pourroit faire contre cette ſublime Méthode.

Source : Bibliothèque nationale de France

L'élève doit SAVOIR :

1. Compléter les propriétés de l'intégrale d'une fonction.
2. Définir "primitive d'une fonction".
3. Connaître les formules des primitives (séries 1 et 2).
4. Connaître la formule d'intégration par parties.
5. Donner la formule de l'intégrale définie.
6. Donner la formule qui permet de calculer le volume d'un solide de révolution (axe des x ou axe des y) et expliquer comment on obtient cette formule.
7. Enoncer le théorème de la moyenne.
8. Donner la formule de la longueur d'un arc de courbe.
9. Donner la formule de l'aire latérale d'un volume de révolution.

L'élève doit ETRE CAPABLE DE :

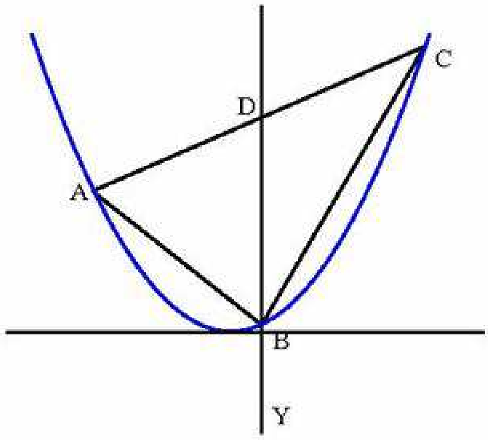
1. Calculer une primitive de façon immédiate, par substitution ou par parties.
2. Calculer une primitive par décomposition en fractions rationnelles simples.
3. Calculer une primitive trigonométrique.
4. Calculer une intégrale définie.
5. Calculer une surface délimitée par le graphique d'une fonction ou de plusieurs fonctions.
6. Calculer le volume d'un solide de révolution.
7. Utiliser le théorème de la moyenne.
8. Calculer la longueur d'un arc de courbe.
9. Utiliser le calcul intégral pour résoudre un problème.

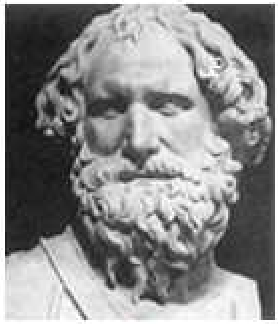
Pour calculer l'aire d'une partie du plan, les mathématiciens grecs utilisaient des méthodes géométriques qui consistaient à transformer la partie du plan en un ou plusieurs polygones dont les aires sont plus faciles à calculer.

Souvent, ils cherchaient à transformer, à l'aide du compas et de la règle, la région donnée en un carré de même surface : c'est un problème de quadrature.

Archimède de Syracuse, par exemple, prouva que l'aire de la partie du plan comprise entre la parabole et la droite AC est égale aux quatre tiers de l'aire du triangle ABC.

> Archimède énonce ainsi son théorème :
> *« Étant donné un segment ABC d'une section rectangle de cône, si par le milieu D de la corde on mène le diamètre DY qui coupe l'arc en B et qu'on joigne BA, BC, le segment ABC vaut les 4/3 du triangle ABC. »*



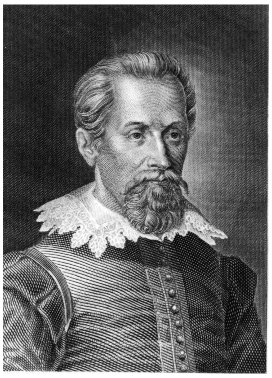


Archimède de Syracuse
(Syracuse, -287 - Syracuse, -212)

Cette méthode, appelée **méthode d'exhaustion**, consiste à ne pas mesurer directement l'aire d'une surface – ce qui était souvent impossible - mais à déterminer le rapport de deux aires.

Plus tard, l'astronome allemand ***Johannes Kepler*** calculait des aires et des volumes en découpant une surface en surfaces très petites (infinitésimales) et en sommant leurs aires. Cette méthode lui a permis de calculer l'aire des orbites des planètes et le volume des barriques de vin...

Par la théorie des « indivisibles », le moine italien Bonaventura Cavalieri calcule, lui aussi, des aires et des volumes : il découpe une surface donnée en surfaces d'aire « indivisible » et il les met en relation avec une surface d'aire connue de telle manière que le rapport des aires des « petites » surfaces soit constant.



Johannes Kepler

(1571-1630)

Bonaventure Cavalieri

(1598-1647)

Au début du 18ème siècle, plusieurs mathématiciens ont cherché à calculer de telles aires de manière plus simple à l'aide de limites. Cependant, ces méthodes manquaient de généralité. La découverte majeure de la résolution générale du problème d'aire fut faite indépendamment par Newton et Leibniz lorsqu'ils s'aperçurent que l'aire sous une courbe pouvait être obtenue en inversant le processus de différentiation. Cette découverte, qui marqua le vrai début de l'analyse, fut répandue par ***Newton*** en 1669 et ensuite publiée en 1711 dans un article intitulé *De Analysis per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*.

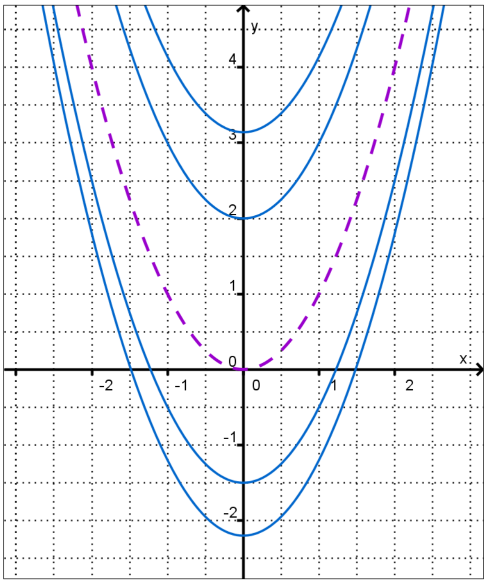
Indépendamment, ***Leibniz*** découvrit le même résultat aux environs de 1673 et le formula dans un manuscrit non publié daté du 11 novembre 1675.

A. Primitives d'une fonction

1. Activité

(1) Sur la figure ci-contre, les fonctions représentées en trait plein ont été obtenues à partir du graphique de la fonction $f(x) = x^2$, tracée en pointillés.

Que peut-on en déduire à propos des dérivées de ces fonctions ?



(2) Donne l'expression de trois fonctions $F(x)$ telles que $F'(x) = 4x^3$.

Ces fonctions $F(x)$ dont la dérivée est $f(x)$, s'appellent primitives de $f(x)$.

(3) Vrai ou faux ?

a. $\ln x$ et $\ln(5x)$ sont des primitives de $\frac{1}{x}$.

b. $\frac{x+1}{x}$ et $5+\frac{2}{x}$ sont des primitives de la même fonction.

c. $2.\sin(2x)$ est la primitive de $\cos(2x)$.

d. Toute primitive de la fonction $(f.g)(x)$ est le produit d'une primitive de $f(x)$ et d'une primitive de $g(x)$.

2. Synthèse

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une **primitive** de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I dont la dérivée est f : $F'(x) = f(x)$.

Exemples :

(1) $F(x) = \sin x$ est une primitive de $f(x) = \cos x$, car $(\sin x)' = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(2) $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de , car $\left(\dfrac{x^2}{2}\right)' = \dfrac{2x}{2} = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Remarque : Certaines fonctions n'ont pas de primitive sur tout leur domaine car elles n'y sont pas continues.

Une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}_0$ mais

- une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ dans $]0;+\infty[$ est $F(x) = \ln x$;
- une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ dans $]-\infty;0[$ est $F(x) = \ln(-x)$.

C'est pourquoi on notera qu'une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ dans $\mathbb{R}_0$ est $F(x) = \ln|x|$.

Propriété

Si $F(x)$ est une primitive particulière de $f(x)$ alors toutes les fonctions $F(x) + C$ (où C est un nombre réel) sont aussi des primitives de $f(x)$.

Définition

L'ensemble des primitives de la fonction f est **appelé intégrale indéfinie de f** et noté $\int f(x)\,dx$.

➔ $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ où $\left| \begin{array}{l} F(x) \text{ est une primitive quelconque} \\ C \text{ est une constante} \end{array} \right.$

L'expression « intégration d'une fonction » désigne la recherche des primitives de cette fonction.

Le symbole $\int$ est dû à G. W. Leibniz, il ressemble à un « S » allongé, rappelant que l'aire peut être calculée comme la somme de petites aires élémentaires.

Propriété d'addition : $\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

$$\int \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Propriété de multiplication par un réel : $\int k.f(x)\,dx = k.\int f(x)\,dx$

3. Primitives des fonctions usuelles

Les primitives des fonctions usuelles se déduisent des différentes formules de dérivation.

Formules d'intégration immédiate

$$\int k\,dx = k.x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq 0, -1)$$

Cas particulier : $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\; dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\; dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

Formules d'intégration des fonctions composées

$$\int f^n.f'\,dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + C$$

$$\int f'.e^f\; dx = e^f + C$$

$$\int f'.a^f\; dx = \frac{a^f}{\ln a} + C$$

$$\int f'.\sin f\; dx = -\cos f + C$$

$$\int f'.\cos f\; dx = \sin f + C$$

$$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \tan f + C$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arcsin f + C$$

$$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arccos f + C$$

$$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \arctan f + C$$

4. Techniques de primitivation

(1) Décomposition linéaire

(1) $\int 3x^2 dx =$

(2) $\int (\sin x + \cos x)\, dx =$

(3) $\int (x^3 - 2x + 4)\, dx =$

(4) $\int \frac{x^4 - 5}{x^2}\, dx =$

(5) $\int x\sqrt[3]{x^4}\, dx =$

Exercices : Calcule

1ère série :

(1) $\int x^4 \, dx$

(2) $\int 5x \, dx$

(3) $\int 6x^7 \, dx$

(4) $\int -4x^2 \, dx$

(5) $\int 4 \, dx$

(6) $\int \left(x^2-3\right) dx$

(7) $\int (2x+1) \, dx$

(8) $\int \frac{-4}{3x^5} \, dx$

(9) $\int \frac{1}{x^2} \, dx$

(10) $\int \frac{1}{2} x^2 \, dx$

(11) $\int \sqrt{x} \, dx$

(12) $\int \left(x^4+3x^2\right) dx$

(13) $\int \frac{1}{5x^2} \, dx$

(14) $\int 3\left(t^3-1\right) dt$

(15) $\int \left(t^3+2t^2+4t+1\right) dt$

(16) $\int \left(\frac{u^4}{4}-\frac{2u^3}{3}-\frac{u}{2}+\frac{1}{3}\right) du$

(17) $\int \frac{4-2x+5x^3}{3} \, dx$

(18) $\int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{x}{2}+1\right) dx$

(19) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2x\right) dx$

(20) $\int \frac{x^5-2}{x^3} \, dx$

(21) $\int \frac{x^4+1}{x^2} \, dx$

(22) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \, dx$

(23) $\int (x+1)^2 \, dx$

(24) $\int (x-3).(2x+1) \, dx$

(25) $\int \left(\frac{2}{u}+\sqrt{u}\right) du$

(26) $\int (x-1)^2.(x+1) \, dx$

(27) $\int \frac{x^4-3x^3}{x^2} \, dx$

(28) $\int \frac{2x^5-3x^2}{x^3} \, dx$

(29) $\int (\sin x-\cos x) \, dx$

(30) $\int (3\sin x+2\cos x) \, dx$

(31) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 u}+\cos u\right) du$

(32) $\int (2t+\cos t) \, dt$

(33) $\int \left(e^x+2\right) dx$

(34) $\int \left(e^x-x\right) dx$

(35) $\int \left(1-2e^x\right) dx$

2ème série :

(1) $\int \frac{1}{(2x-3)^2}dx$

(2) $\int \sin x.\cos^3 x\,dx$

(3) $\int \sin(3x)\,dx$

(4) $\int 3\sin(2x+5)\,dx$

(5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$

(6) $\int (2x+3)^4\,dx$

(7) $\int 4(5x-2)^3\,dx$

(8) $\int \frac{3}{(3x+2)^3}dx$

(9) $\int (2x+1)(x^2+x-3)^3\,dx$

(10) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

(11) $\int \frac{1}{1+3x}dx$

(12) $\int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

(13) $\int \frac{1+e^x}{x+e^x}dx$

(14) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

(15) $\int \frac{3x^2+1}{3x^3+3x-5}dx$

(16) $\int \cos x.\sin x\,dx$

(17) $\int \frac{1}{\cos^2 2x}dx$

(18) $\int e^{3x-1}dx$

(19) $\int e^{3-x}dx$

(20) $\int (2x+1)e^{2x^2+2x-3}dx$

(21) $\int \tan x\,dx$

(22) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx$

(23) $\int \frac{3x}{x^2+1}dx$

(24) $\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}dx$

(2) Intégration par substitution

Cette méthode consiste à appliquer en sens inverse la formule de la dérivée de la composée de 2 fonctions : $\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = f'\left(g\left(x\right)\right).g'\left(x\right)$, en utilisant une autre variable $\left(u\right)$. On cherchera à transformer la fonction donnée en une fonction dont l'expression est plus simple à intégrer.

Exemple 1 :

$\int \frac{x}{2x+1}dx$ (poser $u = 2x+1$)

Si la fonction à intégrer contient un facteur du type $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$ ou $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$ mais aucun autre facteur irrationnel, les substitutions suivantes permettent souvent de calculer la primitive :

pour $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, on pose $x = \frac{a}{b}\sin u$

pour $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$, on pose $x = \frac{a}{b}\tan u$

pour $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$, on pose $x = \frac{a}{b\cos u}$

Exemple 2 :

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} \text{ (poser } x = 2\tan u \text{)}$$

Exercices : Calcule les primitives suivantes :

(1) $\int x.\sqrt{x-1}\,dx$ (poser $u = x-1$)

(2) $\int x^2.(x-3)^5\,dx$ (poser $u = x-3$)

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ (poser $u = x+1$)

(4) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ (poser $u = \tan x$)

(5) $\int \frac{3x}{(5x+3)^2}\,dx$

(6) $\int \frac{x^2}{(5-2x)^3}\,dx$

(7) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

(8) $\int (1+x)\sqrt{2x+3}\,dx$

(9) $\int \frac{x}{\sqrt[4]{3+4x}}\,dx$

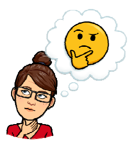
(10) $\int x.(2x+1)^6\,dx$

(11) $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

(12) $\int \frac{x^2+3}{x-2}\,dx$

(13) $\int \frac{(16-9x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}\,dx$

Pour chercher :



Calcule la primitive suivante : $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$. (*Examen d'admission, EPL, Juillet 2018*)

(3) Intégration par parties

On connaît la formule de dérivation du produit de 2 fonctions :

$$\left[f(x).g(x)\right]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x).$$

Donc $\int \left[f(x).g(x)\right]' dx = \int \left(f'(x).g(x) + f(x).g'(x)\right) dx$

$$f(x).g(x) = \int f'(x).g(x)\,dx + \int f(x).g'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)\,dx}$$

<u>Exemples :</u>

(1) $\int x.\sin x \; dx$

(2) $\int \ln x \; dx$

Retenons que cette méthode est utilisée lorsque la fonction à intégrer est le produit d'un polynôme par une fonction trigonométrique, une fonction logarithmique ou une fonction exponentielle, ou dans le cas d'un produit d'une fonction exponentielle par une fonction trigonométrique.

Exercices : Calcule

(1) $\int x(x-1)^4\,dx$

(2) $\int (2x-3)(x+1)^6\,dx$

(3) $\int x.\cos x\;dx$

(4) $\int x^2.\ln x\;dx$

(5) $\int x^2.\sin x\;dx$

(6) $\int e^x.(1-x)\;dx$

(7) $\int \dfrac{\ln x}{x^2}\,dx$

(8) $\int x^2.e^x\;dx$

(9) $\int e^x.\cos x\;dx$

(4) Intégration par décomposition en fractions rationnelles simples

La décomposition en fractions simples n'est pas une technique propre au calcul intégral. Elle permet de décomposer une fraction de la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes en x (avec $Q(x) \neq 0$), en somme de fractions élémentaires que l'on est capable d'intégrer.

1. Si le degré du numérateur est supérieur ou égal au degré du dénominateur, il faut d'abord effectuer le quotient par une division euclidienne.

   <u>Exemple :</u> $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+3}{x+1}\,dx$

2. Si le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur et que le dénominateur est irréductible, il faut essayer de faire apparaître la dérivée du dénominateur dans le numérateur. Nous avons déjà rencontré ce cas (série 2) et nous ne y attardons plus.

3. Si le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur et qu'il est possible de factoriser le dénominateur en éléments « simples », alors il faut décomposer (factoriser) ce dénominateur au maximum. Un théorème nous assure qu'en factorisant une expression au maximum, on trouvera toujours des expressions linéaires $(ax+b)$ ou des expressions quadratiques irréductibles $(ax^2+bx+c \text{ avec } \Delta<0)$.

Quatre cas peuvent alors se présenter :

- Le dénominateur est un produit de facteurs du premier degré **distincts** :

Exemple : $f(x)=\dfrac{3x^2-5x+2}{(2x+4)(3x-5)(-2x-3)}$

alors $f(x)=\dfrac{A}{2x+4}+\dfrac{B}{3x-5}+\dfrac{C}{-2x-3}$

- Le dénominateur est un produit de facteurs du premier degré dont **certains sont multiples** :

Exemple : $f(x)=\dfrac{3x^2-5x+2}{(x-2)^3x^2}$

Alors $f(x)=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{(x-2)^3}+\dfrac{D}{x}+\dfrac{E}{x^2}$

- Le dénominateur est un produit de facteurs du second degré **distincts et irréductibles** :

Exemple : $f(x)=\dfrac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)}$

alors $f(x)=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}+\dfrac{Dx+E}{x^2+4}$

- Le dénominateur est un produit de facteurs du second degré **distincts et irréductibles dont certains sont multiples** :

Exemple : $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$

alors $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}+\dfrac{Ex+F}{x^2+1}+\dfrac{Gx+H}{(x^2+1)^2}+\dfrac{Ix+J}{(x^2+1)^3}$

Exemple : Calculons $\displaystyle\int\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$.

Exercices : Calcule

(1) $\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx$

(2) $\int \frac{2x+3}{(x-3)^2}\,dx$

(3) $\int \frac{x^4+x^2+2}{x^3+5x^2+8x+4}\,dx$

(4) $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx$

(5) $\int \frac{4x^2+4x-1}{4x^2-4x+3}\,dx$

(6) $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

(7) $\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$

(8) $\int \frac{1-x+x^2}{x+1}\,dx$

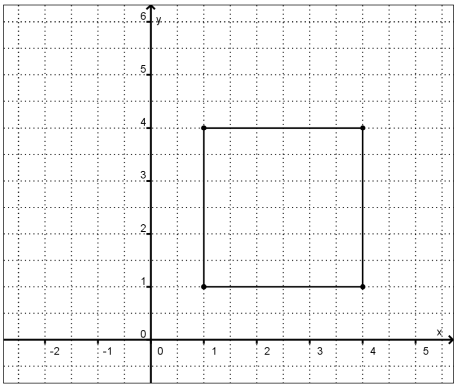
(9) $\int \frac{37-11x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$

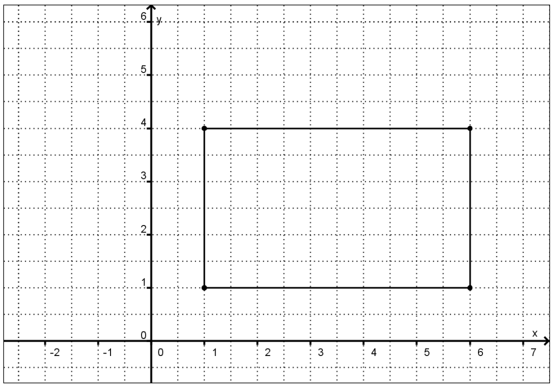
(10) $\int \frac{x+16}{x^2+2x-8}\,dx$

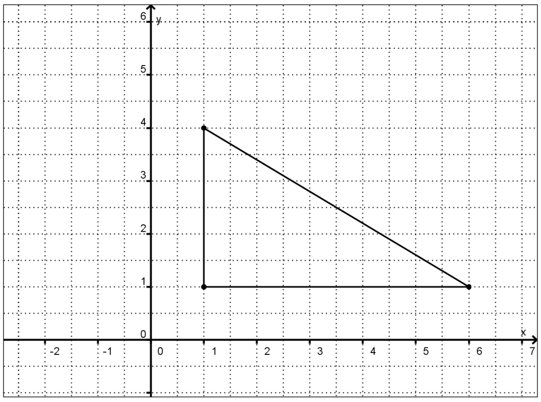
B. Intégrale définie

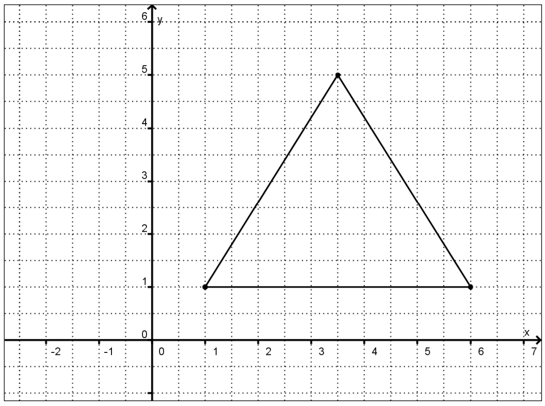
1. Activité

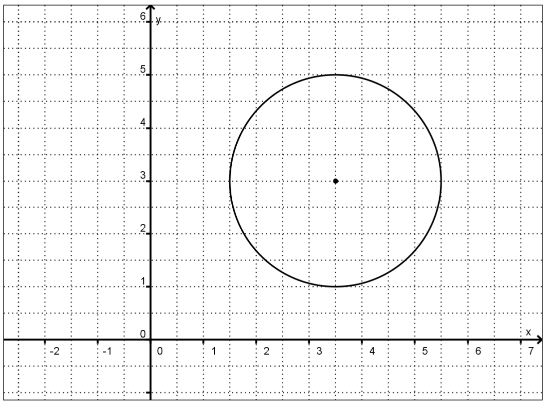
Calcule, avec la plus grande précision possible, l'aire des figures données.

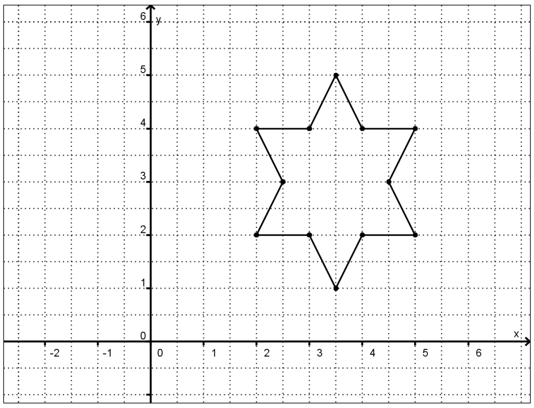








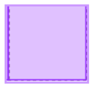


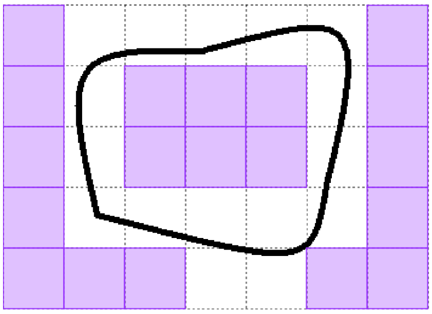


2. Calcul approché d'une aire

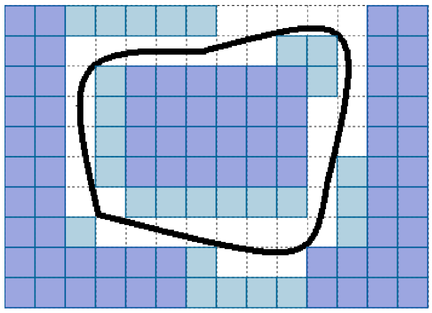
Déterminer l'aire d'une région dont les bords sont rectilignes (comme le rectangle, le triangle ou le trapèze) ne pose aucun problème.

Pour déterminer l'aire d'une région dont les bords sont "courbes", on peut approcher cette aire par des figures plus simples.

Par exemple, pour trouver l'aire $\mathcal{A}$ du domaine D, on définit une unité d'aire : 



Ainsi, on a $6 < \mathcal{A} < 22$



En choisissant une unité d'aire plus petite :  , on a

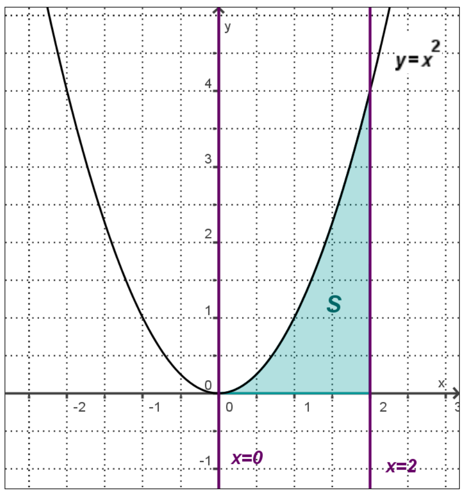
$$\frac{37}{4} < \mathcal{A} < \frac{74}{4}$$

Il est facile d'imaginer qu'en continuant de la sorte, on trouvera des approximations toujours meilleures.

A présent, nous allons approximer l'aire sous une courbe en construisant des rectangles.

Le but de l'activité est de déterminer la surface S délimitée par :

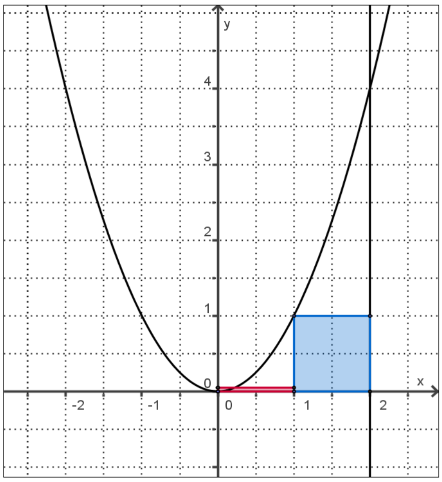
- la courbe $y = x^2$
- l'axe des abscisses
- les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.



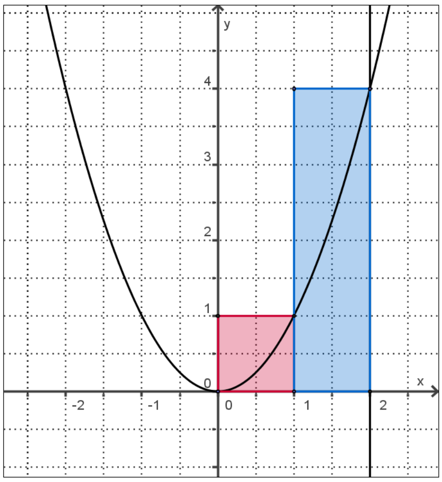
Découpons l'intervalle $[0;2]$ en deux sous-intervalles de même longueur. Construisons ensuite les rectangles dont les bases sont les longueurs des sous-intervalles et dont les hauteurs sont :

(1) la plus petite valeur que prend $f(x)$ sur le sous-intervalle ;

(2) la plus grande valeur que prend $f(x)$ sur le sous-intervalle.



Sous-intervalles : $[0;1]$ et $[1;2]$

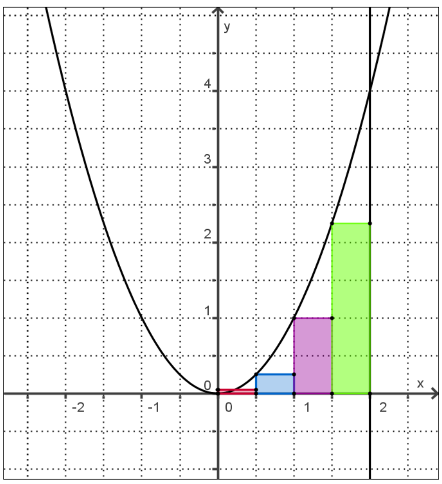


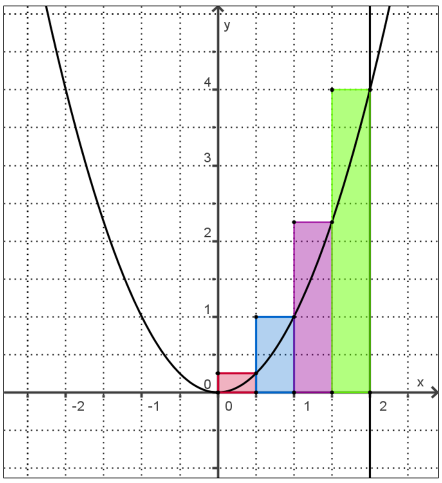
Calculons :

S_m : la somme des aires des rectangles de plus petites hauteurs

S_M : la somme des aires des rectangles de plus grandes hauteurs

Répétons ces deux opérations en découpant l'intervalle $[0;2]$ en 4 sous-intervalles de même longueur.





$S_m =$

$S_M =$

Que valent S_m et S_M si on découpe $[0;2]$ en 8 sous-intervalles ?

Si on subdivise davantage l'intervalle $[0;2]$, on constate que les suites (S_m) et (S_M) convergent vers la même valeur, qui est S, l'aire recherchée.

n	S_m	S_M
15	2,40593	2,93926
30	2,53482	2,80148
50	2,5872	2,7472
100	2,6268	2,7068
200	2,6467	2,6867
300	2,65335	2,68001
400	2,65668	2,67666
500	2,65867	2,67467

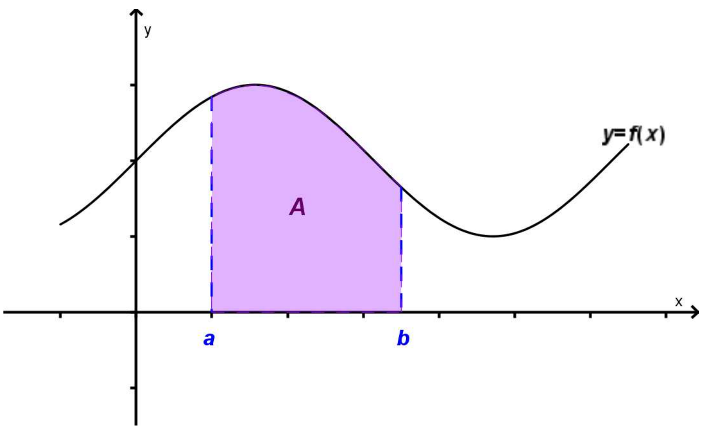
Conclusion : (S_m) et (S_M) convergent vers 2,66.

Cette valeur est appelée **intégrale définie de x^2 entre les bornes 0 et 2**.

3. Généralisation

On vient d'observer, dans le cas d'une fonction f continue[1], positive et croissante sur un intervalle $[a;b]$, que l'on peut encadrer l'aire limitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ par deux sommes d'aires de rectangles.

On peut généraliser cette observation à toute fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$:



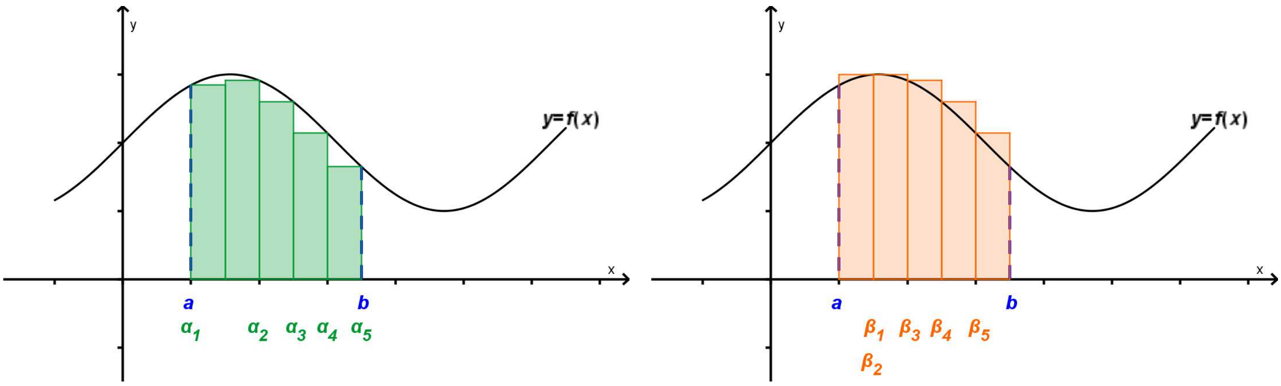
[1] On peut dire qu'une fonction est continue si son graphique se trace d'un trait continu, « sans lever le crayon ».

On partage l'intervalle $[a;b]$ en n sous-intervalles consécutifs de longueur Δx.

Pour chaque sous-intervalle, on dessine deux rectangles dont la base vaut Δx :

(1) l'un a comme hauteur la plus <u>petite</u> valeur prise par f sur le sous-intervalle considéré, on la note $f(\alpha_i)$;

(2) l'autre a comme hauteur la plus <u>grande</u> valeur prise par f sur le sous-intervalle considéré, on la note $f(\beta_i)$.



L'aire A est ainsi encadrée par les sommes des aires des rectangles :

$$f(\alpha_1).\Delta x + f(\alpha_2).\Delta x + \ldots + f(\alpha_n).\Delta x \leq A \leq f(\beta_1).\Delta x + f(\beta_2).\Delta x + \ldots + f(\beta_n).\Delta x.$$

Lorsque le nombre n de sous-intervalles augmente, la largeur de chaque sous-intervalle diminue et les limites des deux sommes qui encadrent l'aire A sont égales :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\beta_i)\Delta x_i\right) = A$$

Cette limite, si elle existe, est appelée <u>intégrale définie</u> de a à b de la fonction f et notée

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Les nombres a et b sont appelés <u>bornes d'intégration</u> et x <u>variable d'intégration</u>.

Cette définition est étendue à toute fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$.

Le symbole $\int$ (« S » allongé) a été introduit par Leibniz (mathématicien allemand, 1646-1716). Le S est la première lettre du mot « somme » et dx fait référence aux Δx apparaissant dans cette somme.

La lettre x du symbole dx est liée à la variable de la fonction. On peut écrire indifféremment $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b f(t)\,dt$, $\int_a^b f(u)\,du$, …

4. Propriétés de l'intégrale d'une fonction

(1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

(2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(4) $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(5) $\int_a^b k.f(x)\,dx = k.\int_a^b f(x)\,dx$

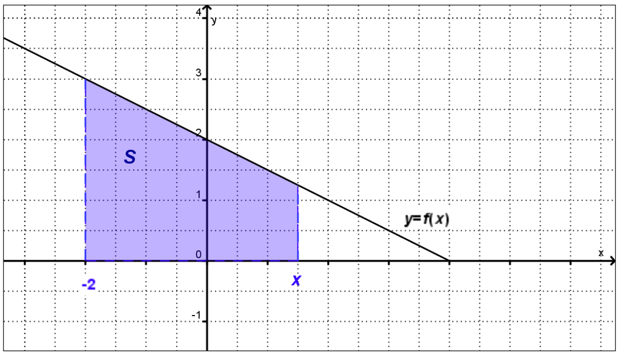
C. Intégrale définie et calcul d'aire

1. Théorème fondamental du calcul intégral

Exemple : Soit une fonction du premier degré $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

Son graphique est une droite d'ordonnée à l'origine 2 et de pente $-\frac{1}{2}$.

Limitons le graphique à $\left]-\infty;4\right]$ pour que la fonction choisie soit positive sur l'intervalle d'étude.



Considérons deux points sur l'axe des x : un point fixe d'abscisse $x=-2$ et un point variable d'abscisse x.

La surface S, comprise entre le graphique de f, l'axe des x et les droites verticales passant par les abscisses -2 et x, est un trapèze dont on peut calculer l'aire :

$$\begin{aligned}
S(x) &= \frac{(B+b).h}{2} \\
&= \frac{\left[f(-2)+f(x)\right].(x+2)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[3+\left(-\frac{1}{2}x+2\right)\right].(x+2) \\
&= \frac{1}{2}\left(5-\frac{1}{2}x\right).(x+2) \\
&= \frac{1}{2}\left(5x+10-\frac{1}{2}x^2-x\right) \\
&= -\frac{x^2}{4}+2x+5
\end{aligned}$$

Cette valeur dépend de la variable x, c'est donc une fonction de x. De plus, en dérivant $S(x)$, on a $S'(x) = -\frac{1}{2}x + 2 = f(x)$. Autrement dit, la surface recherchée est une fonction dont la dérivée est f.

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

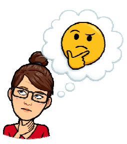
2. Intégrales définies

On utilise la propriété $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).}$

Exemple 1 : $\int_0^2 x^2 \; dx = \ldots$

Exemple 2 : (par substitution) $\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx$

Pour chercher :



Résous $\int_{3\pi}^{\alpha} \cos\left(-\frac{x}{6}\right) dx = -3$

$Sol :\ \alpha = \pi + 12k\pi \ ,\ k \in \mathbb{Z}$

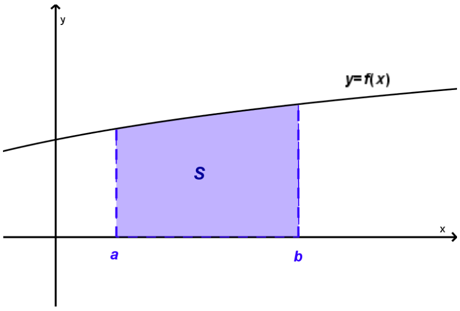
D. Applications du calcul intégral

1. Aire d'une surface délimitée par l'axe des abscisses et une ou plusieurs courbes

Nous savons déjà que l'aire de la surface comprise entre la courbe représentative d'une fonction $f(x)$ positive, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x=a$ et $x=b$ est calculée par : $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

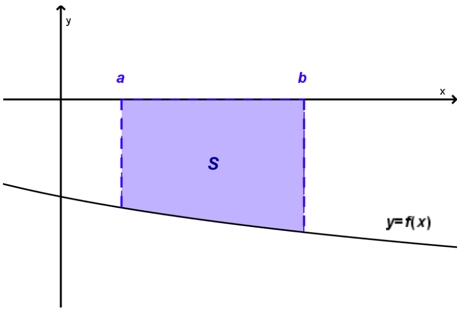
Soit S la partie du plan dont on calcule l'aire.

Cas n°1 : Si f est continue et positive sur $[a;b]$ $(a<b)$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est la mesure S de l'aire délimitée par G_f, l'axe des abscisses et les droites $x=a$ et $x=b$.



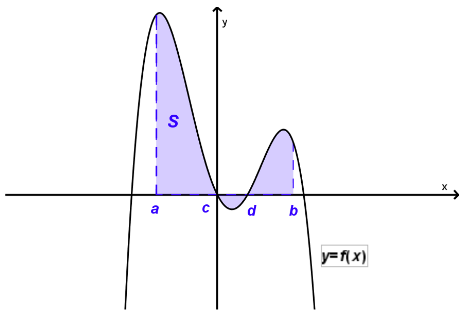
$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

Cas n°2 : Si f est continue et négative sur $[a;b]$ $(a<b)$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est l'opposée de la mesure S de l'aire délimitée par G_f, l'axe des abscisses et les droites $x=a$ et $x=b$.



$$S=-\int_a^b f(x)\,dx.$$

Cas n°3 : Si f est continue et change de signe sur $[a;b]$ $(a<b)$ (on dit que f est quelconque), alors on partage $[a;b]$ en sous-intervalles où la fonction est soit positive soit négative et on effectue la somme des différentes aires.

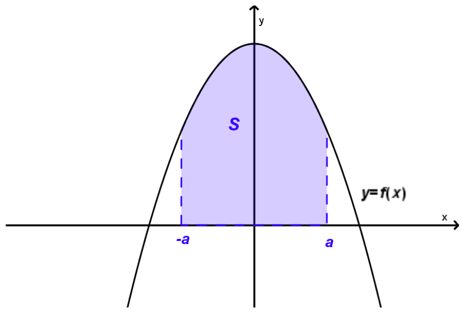


$$S=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx$$

Cas n°4 : Si f est <u>paire</u> (ou <u>impaire</u>) sur $[-a;a]$

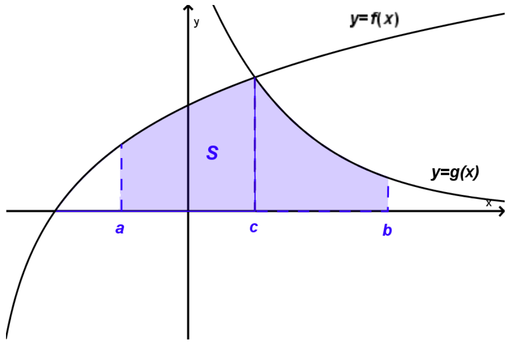
alors

$$S = 2.\int_0^a f(x)\,dx \quad \left(\text{ou S=2.}\int_{-a}^0 f(x)\,dx\right)$$



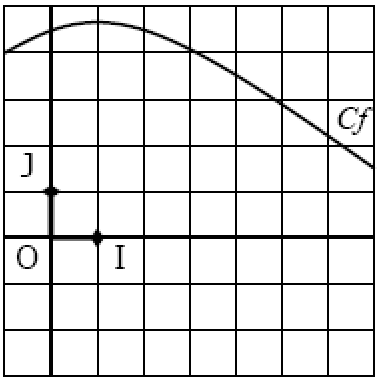
Cas n°5 : Si S est délimitée par deux courbes qui "se suivent", il faut déterminer l'intersection des deux courbes et faire deux (ou plusieurs) intégrations successives :

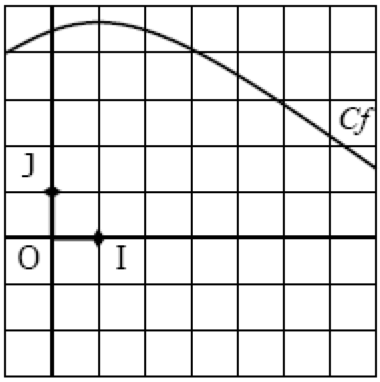
$$S = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx$$



Exercices :

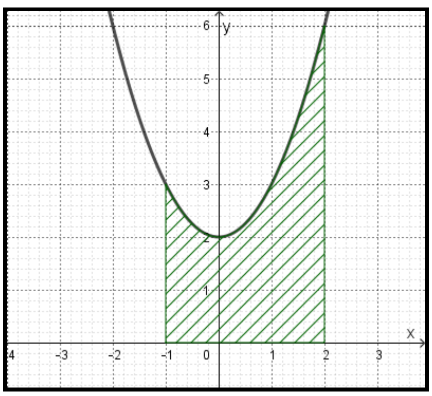
1. On a représenté la courbe de la fonction f. Colorie la zone indiquée.

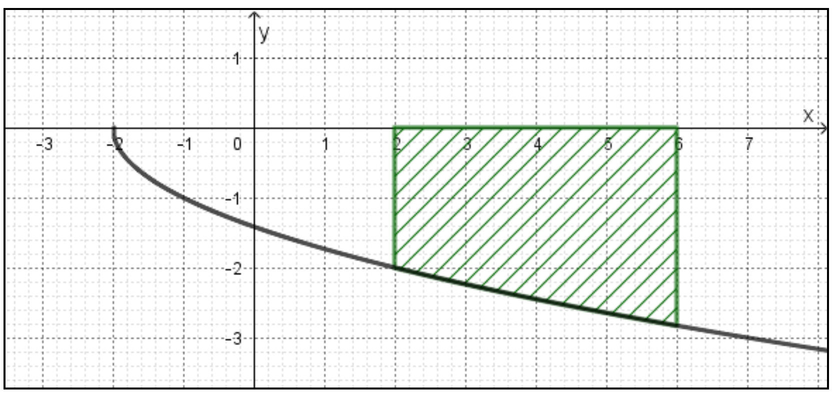


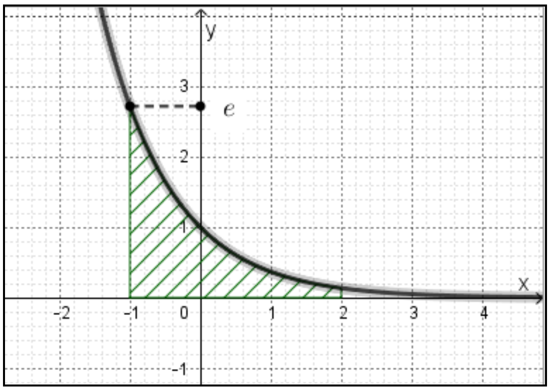


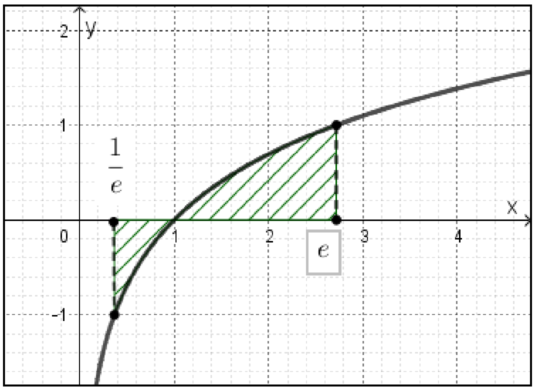
$$A = \int_2^5 f(x)\,dx \qquad\qquad A = \int_3^6 f(x)\,dx$$

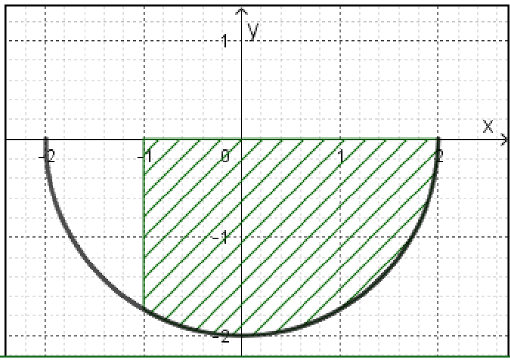
2. Ecris et calcule les intégrales définies correspondant à chaque situation graphique.

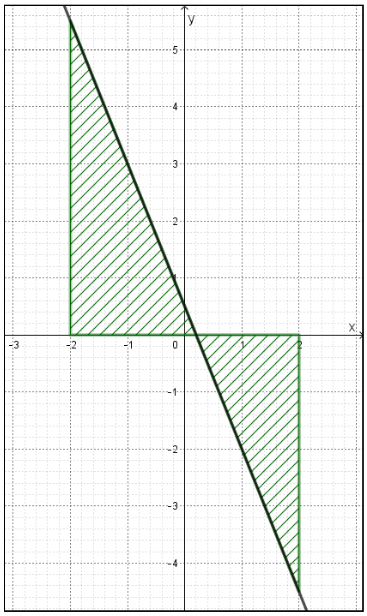








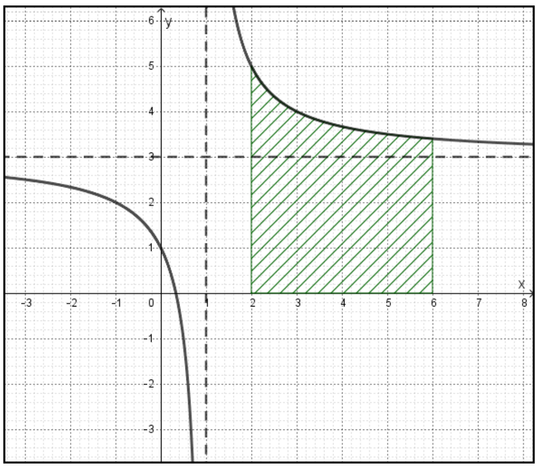




L'équation générale d'un cercle de centre $C(a;b)$ et de rayon r est $\mathscr{C} \equiv (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

En isolant y, on trouve $y=\pm\sqrt{r^2-(x-a)^2}+b$.

Ainsi, on trace un cercle, qui n'est pas une fonction,
Grâce à ces deux fonctions.



« Comment déterminer l'expression analytique d'une fonction homographique à partir de son graphique ? »

https://bit.ly/3gukmiQ

3. Calcule les aires des surfaces suivantes, délimitées par le graphique de $f(x)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Pour déterminer la position de ces surfaces par rapport à l'axe des abscisses, étudie le signe de la fonction ou représente-la.

   (1) $f(x) = -x^2 + 2x$ entre $x = 0$ et $x = 2$

   (2) $f(x) = x^2 - 4$ entre $x = -2$ et $x = 1$

   (3) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ entre $x = -1$ et $x = 2$

   (4) $f(x) = \sin x$ entre $x = 0$ et $x = \pi$

   (5) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x.(x-1)}$ entre $x = 2$ et $x = 5$

   (6) $f(x) = |x-2| - 3$ entre $x = 1$ et $x = 7$

> Indice : Trace cette fonction qui est la réunion de deux demi-droites :
> si $x - 2 \geq 0$, alors $|x-2| = x - 2$
> si $x - 2 < 0$, alors $|x-2| = -(x-2)$

4. Représente les fonctions *f* et *g*.
   Calcule ensuite l'aire de la surface délimitée par les graphiques de $f(x)$, de $g(x)$ et l'axe des abscisses.

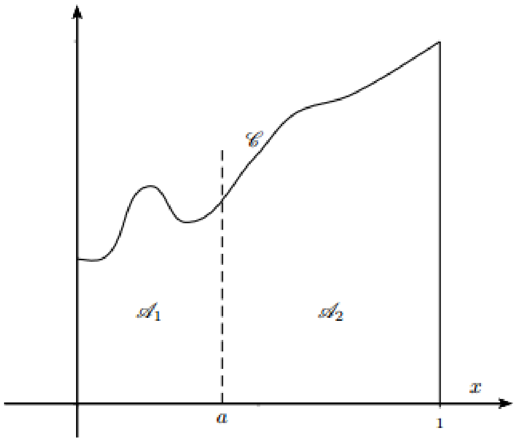
   (1) $f(x) = \dfrac{x}{2}$ et $g(x) = -x + 3$

   (2) $f(x) = x^2$ et $g(x) = (x-4)^2$

5. Soit f une fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1], continue et positive sur cet intervalle, et a un réel tel que 0 < a < 1.

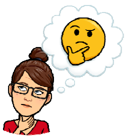
   On note :

   - C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal ;
   - $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses et la courbe C d'une part, les droites d'équations $x=0$ et $x=a$ d'autre part.
   - $\mathcal{A}_2$ l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses et la courbe C d'une part, les droites d'équations $x=a$ et $x=1$ d'autre part.



   Détermine la valeur de a de sorte que les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ soient égales pour la fonction $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$ définie sur l'intervalle $[0;1]$.

Pour chercher :



1. Calcule, en commençant par une intégration par parties, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x.\cos x}{(1+\sin x)^2}dx$. (*ERM, 2011*)

   Sol : $-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}-\sqrt{2}+2$

2. Calcule l'intégrale $18\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{3x}.\ln\left(1+e^x\right)dx$ (*ERM, 2004*)

   Sol :

2. Aire d'une surface délimitée par deux courbes

On considère deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ continues sur $[a;b]$ telles que $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a;b]$.

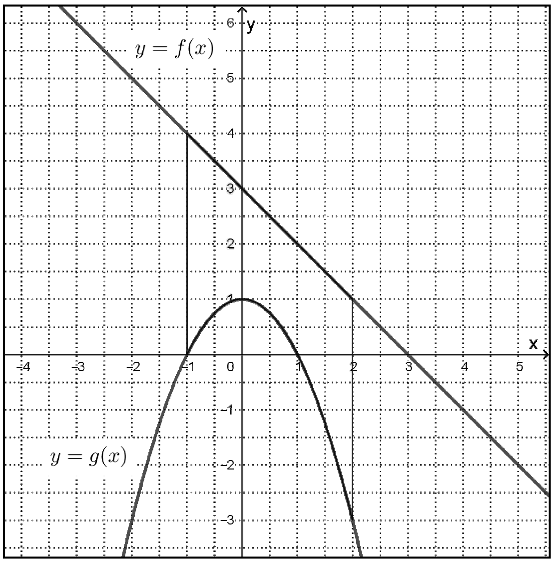
L'aire de la surface délimitée par le graphe de f, le graphe de g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est donnée par : $\boxed{S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx}$.

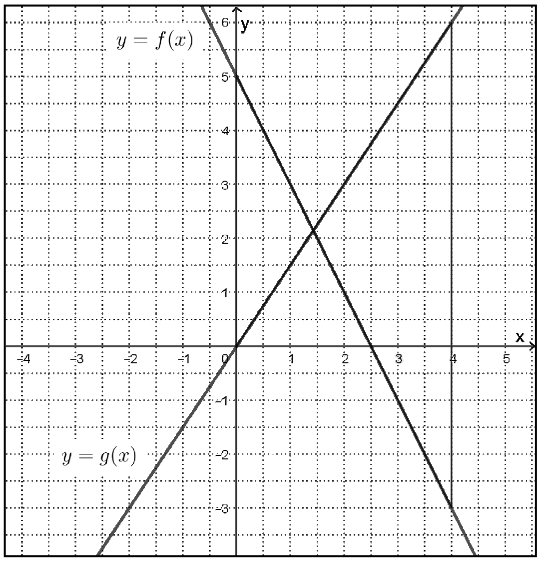
<u>Remarque :</u> Les graphes eux-mêmes peuvent délimiter les bornes de l'intégrale à calculer. Dans ce cas, on commencera par déterminer les abscisses des points d'intersection des deux fonctions.

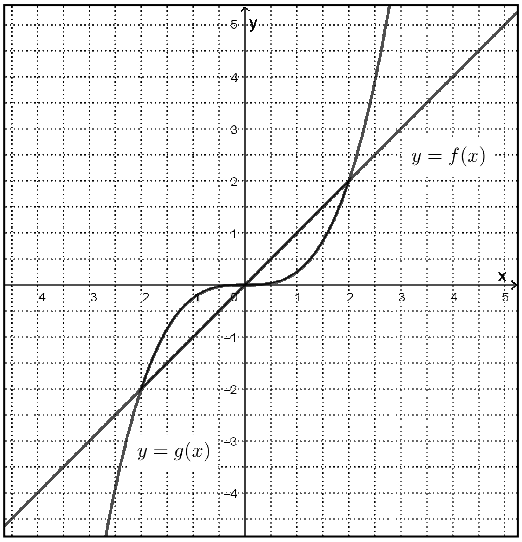
<u>Exemple :</u> Calculons l'aire de la surface comprise entre le graphe de $f(x) = (x-2)^2$ et celui de $g(x) = -2x + 5$.

Exercices :

1. Calcule les aires des surfaces colorées suivantes :







2. Calcule les aires des surfaces délimitées par les graphiques de $f(x)$ et de $g(x)$.

   Lorsque la question ne le précise pas, calcule les bornes d'intégration en recherchant les points d'intersection des deux fonctions.

   (1) $f(x) = x^3$ $\quad$ $g(x) = x^2 + 2x$ $\quad$ entre $x = -1$ et $x = 0$

   (2) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $\quad$ $g(x) = -x + 4,5$

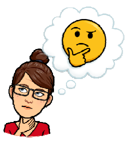
   (3) $f(x) = \sin x$ $\quad$ $g(x) = \cos x$ $\quad$ entre $x = 0$ et $x = 2\pi$

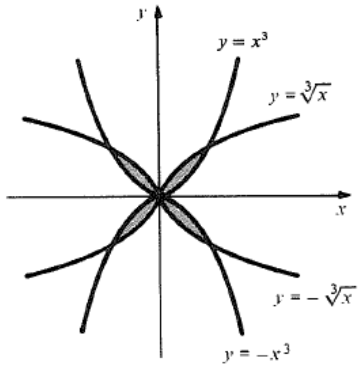
   (4) $f(x) = -x^2 + 2x + 6$ $\quad$ $g(x) = 2x + 2$

(5) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad g(x)=\dfrac{x^2}{2}$

(6) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ $\qquad g(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ entre $x=1$ et $x=2$

<u>*Pour chercher :*</u>





(1) Détermine la surface de la « fleur » ombragée.

(2) Calcule $\displaystyle\int_1^e x.\ln x\,dx$.

(3) Généralise le résultat obtenu en (1) en montrant que, pour

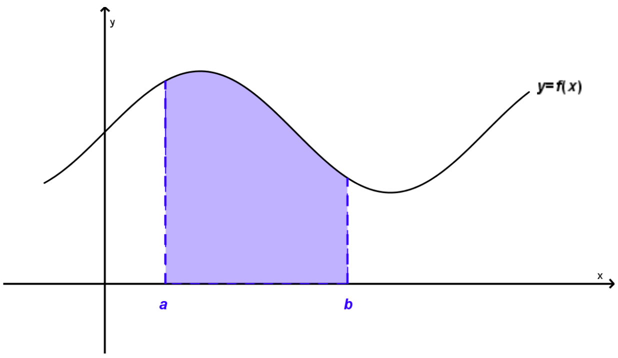
$n\neq -1$, $\displaystyle\int_1^e x^n.\ln x\,dx=\frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$.

(4) Soit la fonction g définie par $g(x)=\displaystyle\int_1^x (2-t).\ln t\,dt$. Détermine x correspondant au maximum de $g(x)$ sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

(*Examen d'admission, ULg, 2002*)

3. Volume d'un solide de révolution

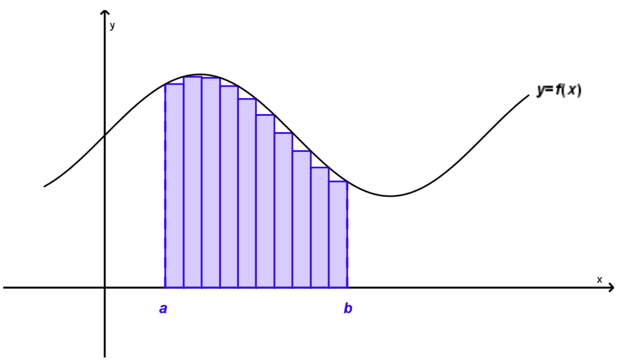
Dans un repère orthonormé du plan, on considère la courbe d'équation $y = f(x)$ limitée par les droites $x = a$ et $x = b$.



On considère également la surface S délimitée par cette partie du graphe et par l'axe des abscisses.

En tournant autour de l'axe des abscisses, S engendre un volume de révolution. Que vaut ce volume V ?

Comme pour calculer les surfaces, on subdivise l'intervalle $[a;b]$ en n sous-intervalles $[x_{i-1};x_i]$ de longueur $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. On construit alors des rectangles sur chaque intervalle $[x_{i-1};x_i]$ dont la base est Δx_i et la hauteur $f(c_i)$ (où c_i est une abscisse quelconque de $[x_{i-1};x_i]$).



La rotation de chacun de ces rectangles autour de Ox engendre un cylindre droit dont la base a une aire égale à $\pi\left[f(c_i)\right]^2$ et dont la hauteur mesure Δx_i. Le volume de chaque cylindre est donc $\pi\left[f(c_i)\right]^2.\Delta x_i$.

Par conséquent, une approximation de V est la somme des volumes de tous les cylindres construits : $V = \sum_{i=1}^{n} \pi\left[f(c_i)\right]^2.\Delta x_i$.

Finalement, lorsque le nombre n de subdivisions tend vers l'infini et que chaque Δx_i tend vers 0, cette somme tend vers le volume recherché : $\boxed{V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2\, dx}$.

Exemple : Déterminons le volume engendré par la rotation autour de Ox de la surface délimitée par le graphe de $f(x)=x^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=3$.

Exercices :

1. Calcule le volume du solide engendré par la rotation autour de Ox de la surface délimitée par le graphique de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

   (1) $f(x)=\frac{x}{2}+1$ entre $x=-2$ et $x=3$

   (2) $f(x)=-x+4$ entre $x=1$ et $x=5$

   (3) $f(x)=4-x^2$ entre $x=-1$ et $x=1$

   (4) $f(x)=\frac{1}{x}$ entre $x=1$ et $x=2$

2. On considère les fonctions $f(x)=\sqrt{x-2}$ et $g(x)=\sqrt{\frac{x}{2}+2}$.

   (1) Représente ces fonctions dans un repère orthonormé.

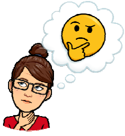
   (2) Calcule la surface délimitée par les graphiques de f et g entre les droites $x=2$ et $x=8$.

   (3) Calcule le volume engendré par la rotation autour de Ox de la surface délimitée par les graphiques de f et g entre les droites $x=2$ et $x=8$.

3. Calcule le volume obtenu en faisant tourner autour de l'axe des x la surface déterminée par $y^2=x.e^{-x^2}$ entre les droites $x=0$ et $x=a$ avec $a>0$

   Détermine ensuite a pour que ce volume soit égal à $\frac{\pi}{4}$.

Pour chercher :



1. Soit la fonction $f(x)=ax^2+b$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.

   (1) Détermine a et b pour que cette fonction s'annule en ± 4 et que l'aire située sous son graphe et au-dessus de l'axe des abscisses soit égale à $\dfrac{64}{3}$.

   Sol : $a=-\dfrac{1}{4}$ et $b=4$

   (2) On considère ensuite les tangentes au graphe de cette fonction passant par le point $(0;5)$. Calcule le volume obtenu par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface délimitée par la fonction et les deux tangentes.

   Sol : $\dfrac{56\pi}{5}$ u.v.

2. Soit la fonction $f(x)=4x.e^{-\frac{1}{2}x}$.

   (1) Etudie la fonction f et représente-la.

   (2) Calcule le volume $V(\lambda)$ engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface délimitée par le graphique de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=\lambda$ (avec λ un paramètre réel).

   Sol : $V(\lambda)=16\pi\left[2-e^{-\lambda}\left(\lambda^2+2+2\right)\right]$

   (3) Calcule $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} V(\lambda)$.

   Sol : 32π

4. Théorème de la moyenne

Propriété

Pour toute fonction f à valeurs réelles, définie et continue sur un intervalle $[a;b]$, il existe un réel c appartenant à $]a;b[$ vérifiant :

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Le nombre $f(c)$ est appelé **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a;b]$.

Remarque : On peut donc donner la définition de la vitesse moyenne V d'un mobile entre les instants t_1 et t_2 dont la vitesse instantanée est $v(t)$:

$$V=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

Exercices :

1. Soit la fonction $f(x)=4x-x^2$.

   Détermine la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;3]$.

2. Un mobile se déplace à la vitesse $v(t)=-t^2+1$ pied par seconde entre $t=0$ et $t=2$. Détermine la vitesse moyenne du mobile entre $t=0$ et $t=2$.

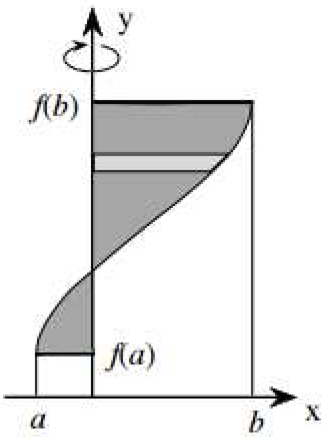
3. Dans une ville, la température (en °C) t heures après 9h est approximativement donnée par la fonction $T(t)=\frac{80}{9}+\frac{70}{9}\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$.

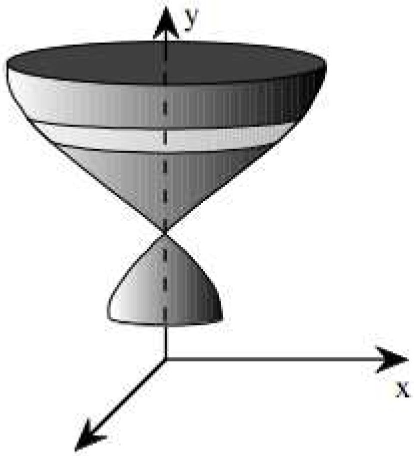
   Quelle est la température moyenne entre 9h et 21h ?

4. Détermine tous les réels tels que leur image par la fonction $f(x)=x^2+x-2$ soit égale à la valeur moyenne de f sur $[0;2]$.

5. Volume d'un solide de révolution autour de l'axe des ordonnées

On considère une courbe d'équation $y = f(x)$ sur un intervalle $[a;b]$. On souhaite calculer le volume du solide engendré par la rotation de cette courbe autour de l'axe des ordonnées, entre les droites $x = a$ et $x = b$.

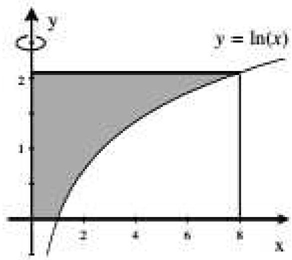




En répétant une démarche analogue à celle du point 3, on peut trouver le volume de ce solide. Chaque cylindre est de rayon x et d'épaisseur Δy. Le volume se calcule donc par l'expression :

$$\boxed{V = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} x^2 dy .}$$

<u>Exemple :</u> Calculons le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des y de la surface représentée ci-contre.



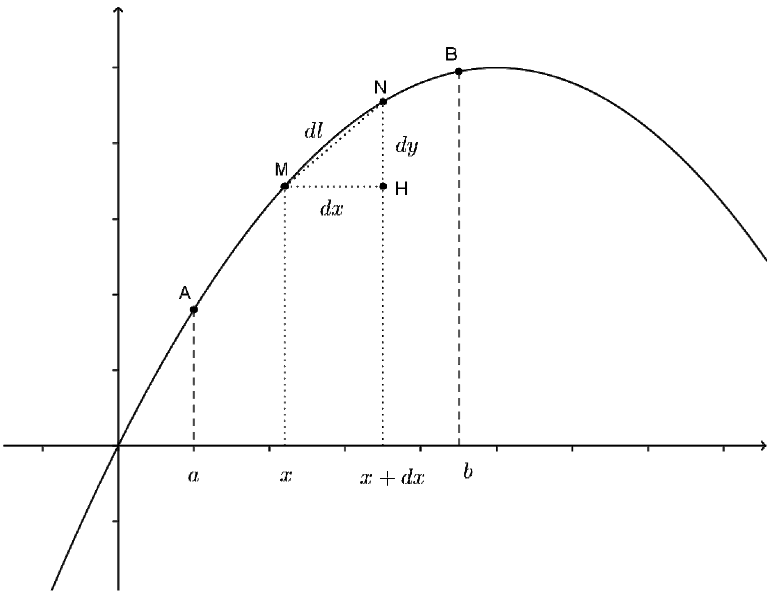
Exercices :

1. Calcule le volume du solide obtenu par la rotation autour de Oy de la surface délimitée par la courbe $y = x^3$ et les droites $x = 0$ et $x = -2$.

2. Soit les fonctions $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x^2 - 14$.
   (1) Représente les graphiques des fonctions *f* et *g* dans un repère orthonormé.
   (2) Calcule le volume de révolution engendré par la rotation de la surface délimitée par ces deux fonctions autour de l'axe des ordonnées.

6. Longueur d'un arc de courbe

On veut calculer la longueur d'une courbe définie par une fonction $y = f(x)$ et comprise entre deux points *A* et *B* d'abscisses respectives *a* et *b*.



La longueur *L* de l'arc de courbe est décomposée en segments élémentaires de longueur *dl*.
Dans le triangle *MHN*, on a :

$$MN \approx MN = \sqrt{\overline{MH}^2 + \overline{HN}^2}$$

$$\Leftrightarrow \ (dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$\Leftrightarrow \ (dl)^2 = (dx)^2 . \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

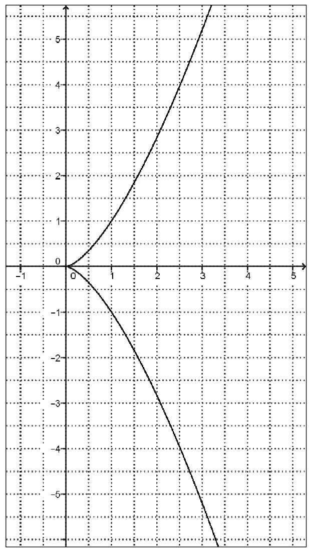
$$\Leftrightarrow \ dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Ainsi,

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx}$$

Exercices :

1. Calcule la longueur de la parabole semi-cubique $y^2 = x^3$ entre les droites $x = 0$ et $x = 5$. (Graphique ci-contre)



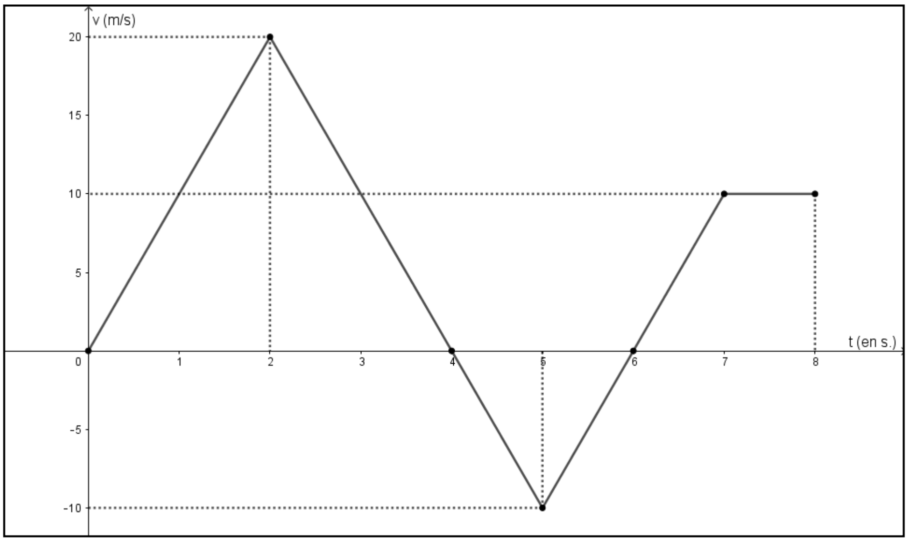
2. Détermine la longueur de l'arc de courbe délimitée par la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ entre les droites $x = 1$ et $x = 2$.

7. Applications diverses

1. Un mobile se déplace sur une latte graduée (l'axe *t*). Il se trouve au temps $t=0$ à l'origine du repère de cette latte.

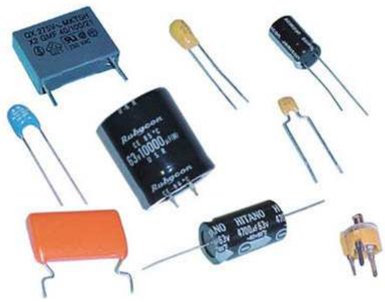
   Voici le graphique de sa vitesse *v*.

   Calcule la distance parcourue par le mobile entre $t=0$ et $t=8$.



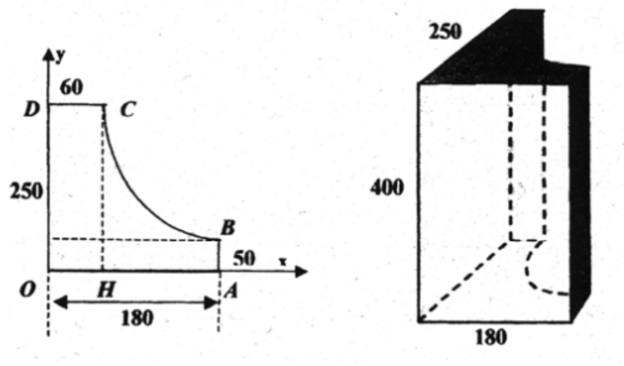
2. L'entreprise NVIDIO, spécialisée dans la fabrication de cartes graphiques, contrôle la qualité des condensateurs. D'après le cahier des charges, un condensateur est supposé conforme si l'énergie consommée est inférieure à 20 J. Cette énergie correspond à l'aire de la surface sous la courbe de la puissance instantanée *p* (exprimée en Watts) entre 0 et 10 secondes. Expérimentalement, on établit que la puissance instantanée d'un condensateur est donnée par la fonction $p(t)=20.t.e^{-t}$.

   Les condensateurs ainsi fabriqués correspondent-ils au cahier des charges ? Justifie ta réponse.



3. Pour rendre un dispositif de chauffage le plus compact possible, on est amené à fabriquer un réservoir de combustible ayant la forme ci-dessous. (Les cotes sont exprimées en millimètres.)

   La base du réservoir est décrite par le schéma suivant :

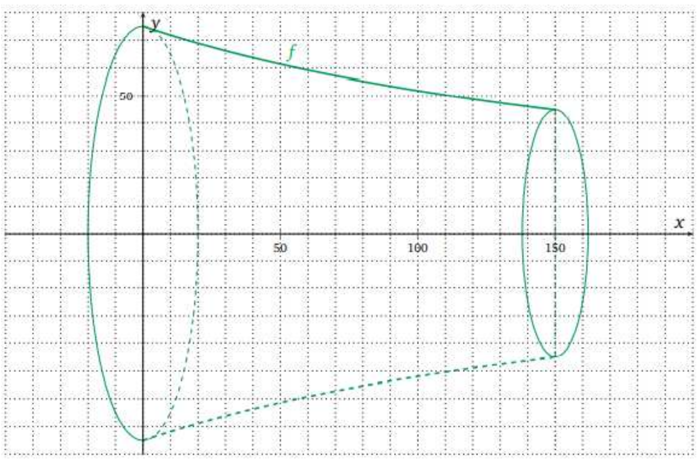


Dans un repère orthonormé d'origine O, l'arc de courbe $\overset{\frown}{BC}$ est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[60;180]$ et du type $f(x)=\dfrac{ax+b}{x}$ où a et b sont deux constantes.

a. Détermine la valeur des constantes a et b.

b. Calcule le volume du réservoir et exprime sa capacité en litres.

4. L'eau utilisée pour refroidir les centrales s'évapore au sommet de tours construites sur le site. La fumée qu'on aperçoit de loin est la vapeur d'eau ; ce n'est pas le résultat d'une combustion. La forme de ces tours est celle d'un hyperboloïde de révolution, c'est-à-dire un volume engendré par la rotation autour d'un axe d'une surface limitée par une partie de branche de l'hyperbole.
Considérons une tour de refroidissement, haute de 150 m. Les diamètres à la base et à la sortie sont respectivement de 150 m et de 90 m. On peut modéliser l'hyperbole qui la définit par la fonction $f(x)=\dfrac{16875}{x+225}$.

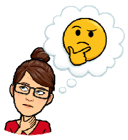


Calcule le volume de cette tour de refroidissement.

5. Détermine la fonction horaire d'une particule se déplaçant avec une vitesse $v(t)=\cos(\pi t)$ le long d'une ligne droite, en sachant qu'au temps $t=0$, le déplacement d est égal à 4 m.

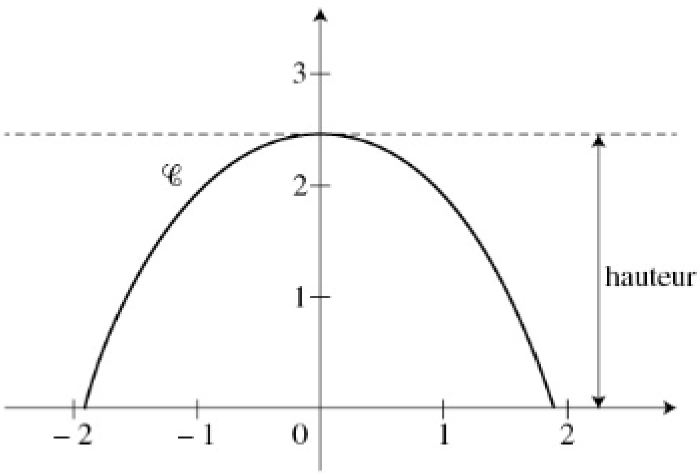
6. Un arbre a été transplanté et après x années, il grandit au taux de $1+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ mètres par an. Après deux ans, il a atteint une hauteur de 5 mètres.
Quel était sa taille au moment de sa transplantation ?

<u>*Pour chercher :*</u>



Les serres en forme de tunnel sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles ; elles limitent les effets des intempéries ou des variations de température.
Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique.

La courbe ci-dessous représente un arceau de serre et a pour équation $y=\dfrac{7}{2}-\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$, elle est définie sur l'intervalle $[-\alpha;\alpha]$.

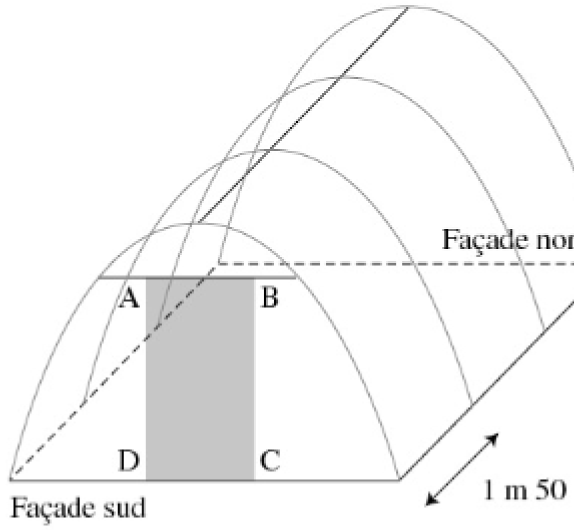


(1) Calcule la hauteur d'un arceau.

(2) Calcule la valeur exacte de la longueur d'un arceau. Cette longueur sera exprimée en fonction de α .

A présent, on fixe au sol quatre arceaux métalliques, espacés d'1,50 mètre, pour construire une serre, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

Sur la façade sud, on prévoit une ouverture modélisée sur le schéma par le rectangle *ABCD* de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.



On souhaite connaître la quantité, exprimée en m², de bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre. Cette bâche est constituée de 3 parties, l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (sauf l'ouverture), la troisième partie de forme rectangulaire recouvrant le dessus de la serre.

(1) Ecris l'intégrale qui permet de calculer la quantité de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord.

(2) On prend 1,92 comme valeur approchée de α. Détermine, au m² près, l'aire totale de bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.