CALCUL INTÉGRAL

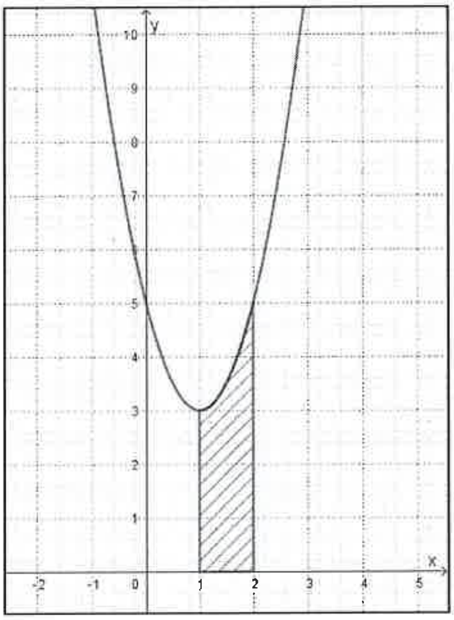
Surface délimitée par une ou plusieurs courbes

C. SCOLAS

https://bit.ly/3ZF3ThE

QVC

1. Ecris et calcule les intégrales définies correspondant à chaque situation graphique.



$f(x) = a\cdot(x-1)^2+3$

$(2;5) \in G_f \Leftrightarrow 5 = a\cdot(2-1)^2+3$

$\Leftrightarrow a = 2$

$\rightarrow f(x) = 2\cdot(x-1)^2+3 = 2\cdot(x^2-2x+1)+3$

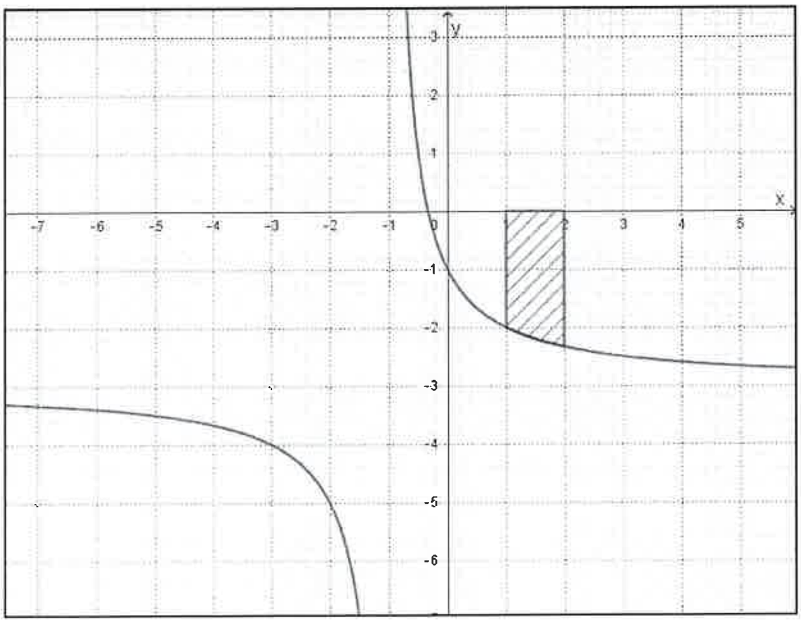
$= 2x^2-4x+5$

$S = \int_1^2 (2x^2-4x+5)\,dx$

$= \left[\frac{2x^3}{3} - 2x^2+5x\right]_1^2$

$= \frac{22}{3} - \frac{10}{3}$

$= 4$ u.a.



$f(x) = -3+\frac{m}{x+1}$

$(1;-2) \in G_f \Leftrightarrow -2 = -3+\frac{m}{1+1}$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{m}{2}$

$\Leftrightarrow m = 2$

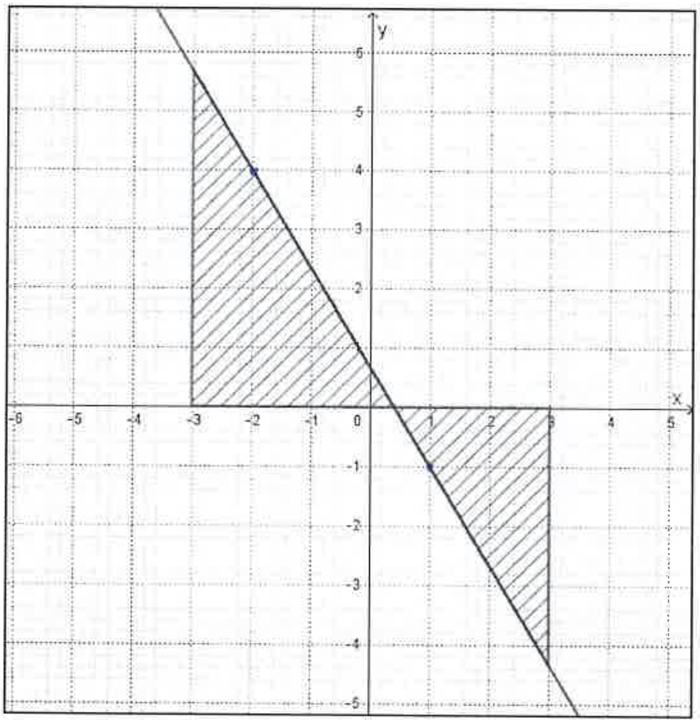
$\rightarrow f(x) = -3+\frac{2}{x+1}$

$S = -\int_1^2 \left(-3+\frac{2}{x+1}\right)dx$

$= -\left[-3x+2\cdot\ln|x+1|\right]_1^2$

$= -(-3,8+1,61)$

$= 2,19$ u.a.



$f(x) = -\frac{5}{3}x + p$

$(-2;4) \in G_f \Leftrightarrow 4 = -\frac{5}{3}\cdot(-2) + p$

$\Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$

$\rightarrow f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$

Racine : $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{3}x = -\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$

$$S = \int_{-3}^{2/5} \left(-\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}\right)dx - \int_{2/5}^{3} \left(-\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{5x^2}{6} + \frac{2}{3}x\right]_{-3}^{2/5} - \left[-\frac{5x^2}{6} + \frac{2}{3}x\right]_{2/5}^{3}$$

$$= \left(\frac{2}{15} + \frac{19}{2}\right) - \left(-\frac{11}{2} - \frac{2}{15}\right) = \frac{229}{15} \text{ u.a.}$$

2. Calcule l'aire de la surface comprise entre la courbe de la fonction $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ et l'axe des abscisses. Tu rechercheras la position de la surface par rapport à l'axe des abscisses en utilisant la méthode de ton choix.

Racines : $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

$x \cdot (x^2 - 6x + 8) = 0$

$x = 0$ $\quad$ $\Delta = 36 - 32 = 4$

$x = \frac{6 \pm 2}{2}$: 4 ; 2

TS :

x		0		2		4	
x	−	0	+	+	+	+	+
x^2-6x+8	+	+	+	0	−	0	+
$f(x)$	−	0	+	0	−	0	+

$$S = \int_{0}^{2} (x^3 - 6x^2 + 8x)dx - \int_{2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 8x)dx$$

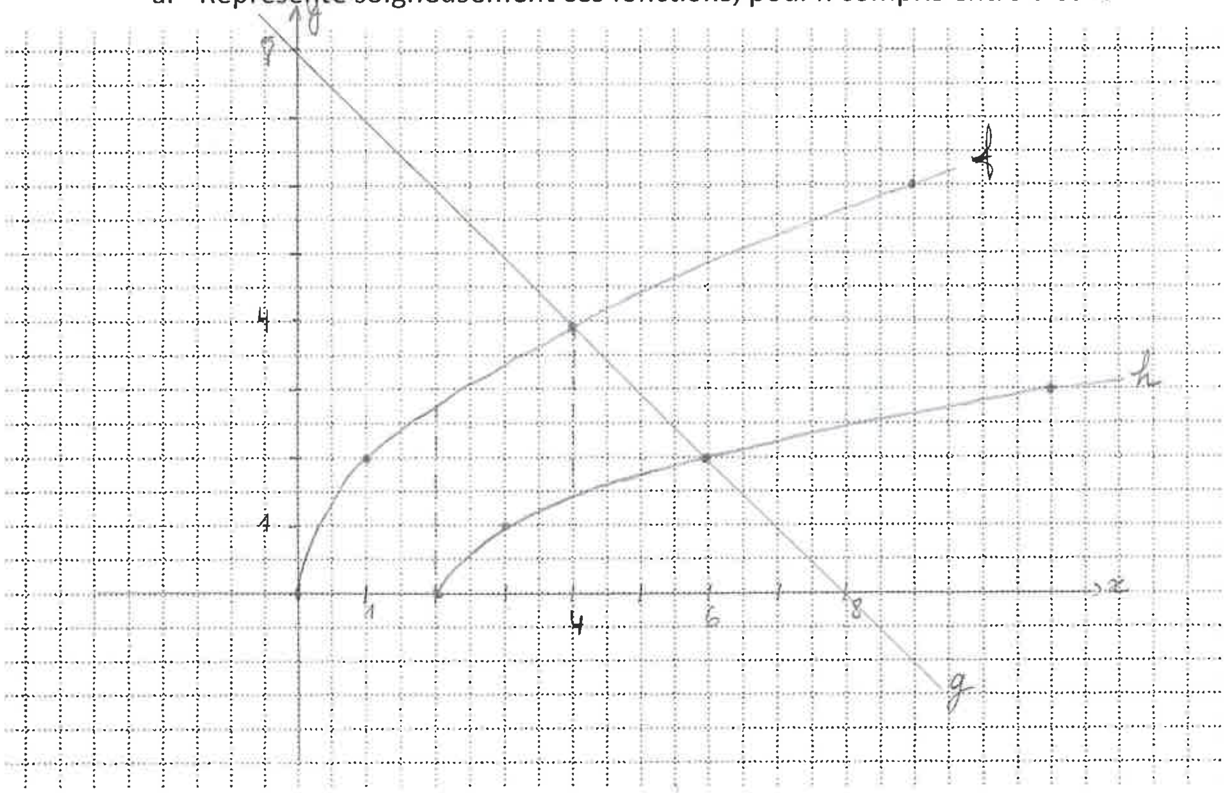
$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4$$

$$= (4 - 0) - (0 - 4)$$

$$= 8 \text{ u.a.}$$

3. On considère les fonctions $f(x)=2\sqrt{x}$, $g(x)=8-x$ et $h(x)=\sqrt{x-2}$.

a. Représente soigneusement ces fonctions, pour x compris entre 0 et 6.



b. Calcule l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses et les courbes des **trois** fonctions.

$$S=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^4 (f(x)-h(x))\,dx+\int_4^6 (g(x)-h(x))\,dx$$

$$=\int_0^2 2\sqrt{x}\,dx+\int_2^4 (2\sqrt{x}-\sqrt{x-2})\,dx+\int_4^6 (8-x-\sqrt{x-2})\,dx$$

$$=\int_0^2 2\cdot x^{1/2}\,dx+\int_2^4 (2\cdot x^{1/2}-(x-2)^{1/2})\,dx+\int_4^6 (8-x-(x-2)^{1/2})\,dx$$

$$=\left[\frac{2\cdot x^{3/2}}{3/2}\right]_0^2+\left[\frac{2\cdot x^{3/2}}{3/2}-\frac{(x-2)^{3/2}}{3/2}\right]_2^4+\left[8x-\frac{x^2}{2}-\frac{(x-2)^{3/2}}{3/2}\right]_4^6$$

$$=\left[\frac{4}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^2+\left[\frac{4}{3}\sqrt{x^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3}\right]_2^4+\left[8x-\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3}\right]_4^6$$

$$=\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}-0\right)+\left(\frac{32-4\sqrt{2}}{3}-\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)+\left(\frac{74}{3}-\frac{72-4\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$=\frac{34}{3}\ u.a.$$

4. Détermine l'aire de la surface délimitée par le graphique de la fonction $f(x)=\frac{1}{4}\cos^2 x+1$, par les droites $x=0$ et $x=\pi$, et par l'axe des abscisses. Tu rechercheras la position de la surface par rapport à l'axe des abscisses en utilisant la méthode de ton choix.

La fonction est strictement positive : $\frac{1}{4}\underbrace{\cos^2 x}_{>0}+1$

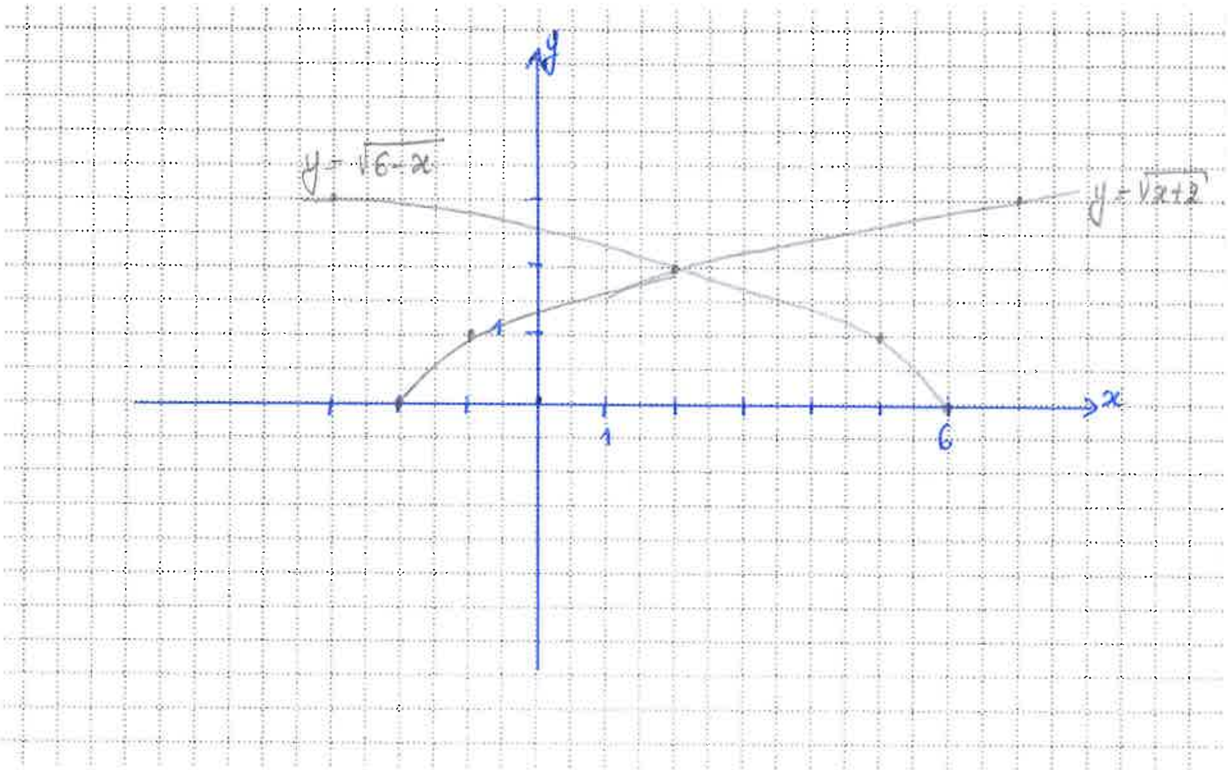
$$S=\int_0^\pi\left(\frac{1}{4}\cos^2 x+1\right)dx=\int_0^\pi\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx+\int_0^\pi 1\,dx$$

$$=\int_0^\pi \frac{1}{2}\,dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi 2\cos(2x)\,dx+\int_0^\pi 1\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x\right]_0^\pi+\frac{1}{4}\left[\sin(2x)\right]_0^\pi+\left[x\right]_0^\pi$$

$$=\left(\frac{1}{2}\pi-0\right)+\frac{1}{4}\cdot(0-0)+\pi-0=\frac{3\pi}{2}\ u.a.$$

5. 1) Représente le graphique des fonctions $f(x)=\sqrt{x+2}$ et $g(x)=\sqrt{6-x}$ dans un même repère orthonormé.



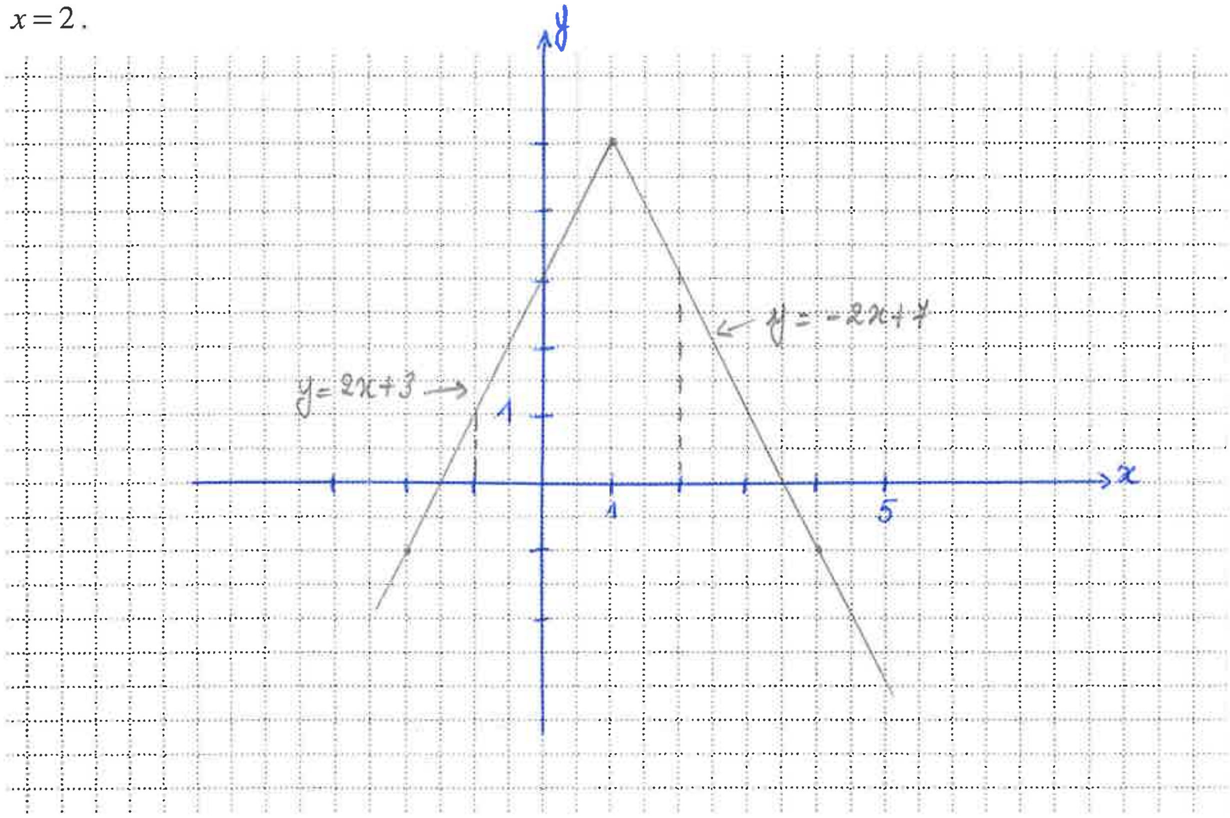
(2) Calcule l'aire de la surface délimitée par le graphique de ces fonctions et l'axe des abscisses.

$$S=\int_{-2}^{2}\sqrt{x+2}\,dx+\int_2^6\sqrt{6-x}\,dx=\int_{-2}^{2}(x+2)^{1/2}dx+-1\cdot\int_2^6-(6-x)^{1/2}dx$$

$$=\left[\frac{(x+2)^{3/2}}{3/2}\right]_{-2}^{2}-\left[\frac{(6-x)^{3/2}}{3/2}\right]_2^6=\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}\right]_{-2}^{2}-\left[\frac{2}{3}\sqrt{(6-x)^3}\right]_2^6$$

$$=\left(\frac{16}{3}-0\right)-\left(0-\frac{16}{3}\right)=\frac{32}{3}\ u.a$$

6. Utilise le calcul intégral pour calculer l'aire de la surface délimitée par le graphe de la fonction $f(x) = -2|x-1|+5$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=2$.



$$S = \int_{-1}^{1} (2x+3)\,dx + \int_{1}^{2} (-2x+7)\,dx$$

$$= \left[x^2+3x\right]_{-1}^{1} + \left[-x^2+7x\right]_{1}^{2}$$

$$= (4-(-2)) + (10-6)$$

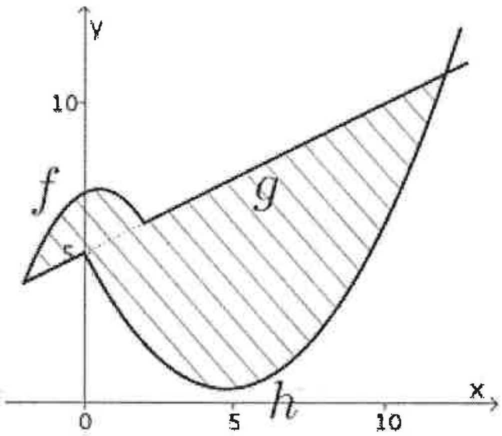
$$= 10 \text{ u.a.}$$

7. Le propriétaire de la ferme où vit Cocotte a décidé d'investir dans la vente d'œufs. Pour la publicité, son projet immédiat est de placer à l'entrée de la ferme une grande enseigne en forme de poule. En voici le plan : sa surface hachurée est délimitée par les représentations graphiques des trois fonctions f, g et h définies par :

$$f(x)=7+\frac{x(1-x)}{2}$$

$$g(x)=\frac{x}{2}+5$$

$$h(x)=\frac{x^2}{5}-1,9x+5$$



dimensions en dm

Afin que le propriétaire sache combien d'ampoules clignotantes il doit acheter, calcule l'aire de cette enseigne en dm².

<u>Intersection de f et g</u> : $7+\frac{x.(1-x)}{2}=\frac{x}{2}+5 \iff 14+x.(1-x)=x+10$

$\iff -x^2=-4$

$\iff x=\pm 2$

<u>Intersection de h et g</u> : $\frac{x^2}{5}-1,9x+5=\frac{x}{2}+5 \iff \frac{x^2}{5}-\frac{12}{5}x=0$

$\iff \frac{x}{5}.(x-12)=0$

$\downarrow \quad \downarrow$

$x=0 \quad x=12$

$$\Rightarrow S=\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))dx+\int_{0}^{2}(f(x)-h(x))dx+\int_{2}^{12}(g(x)-h(x))dx$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(7+\frac{x.(1-x)}{2}-\left(\frac{x}{2}+5\right)\right)dx+\int_{0}^{2}\left(7+\frac{x.(1-x)}{2}-\left(\frac{x^2}{5}-1,9x+5\right)\right)dx+\int_{2}^{12}\left(\frac{x}{2}+5-\left(\frac{x^2}{5}-1,9x+5\right)\right)dx$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(2-\frac{x^2}{2}\right)dx+\int_{0}^{2}\left(-\frac{7}{10}x^2+\frac{12}{5}x+2\right)dx+\int_{2}^{12}\left(-\frac{x^2}{5}+\frac{12}{5}x\right)dx$$

$$=\left[2x-\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{7x^3}{30}+\frac{6x^2}{5}+2x\right]_{0}^{2}+\left[\frac{-x^3}{15}+\frac{6x^2}{5}\right]_{2}^{12}$$

$$=\left(0-\left(-\frac{8}{3}\right)\right)+\left(\frac{104}{15}-0\right)+\left(\frac{288}{5}-\frac{64}{15}\right)$$

$$=\frac{944}{15}\ u.a.$$