CALCUL INTÉGRAL

Volume, théorème de la moyenne et longueur d'arc

C. SCOLAS

https://bit.ly/3ZF3ThE

1. Calcule le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface limitée par *Ox*, *Oy*, la droite $x=1$ et la courbe d'équation $y=\frac{x^2}{2}+x-3$.

$V=\pi\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+x-3\right)^2dx$ $\quad (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$=\pi\int_0^1\left(\frac{x^4}{4}+x^2+9+x^3-3x^2-6x\right)dx$

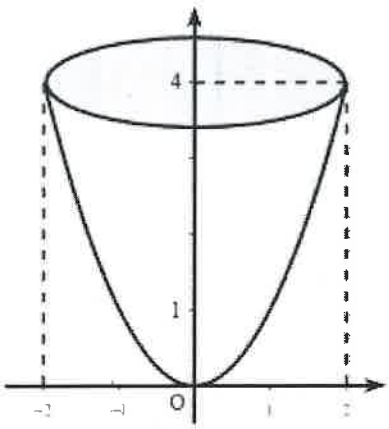
$=\pi\int_0^1\left(\frac{x^4}{4}+x^3-2x^2+9\right)dx$

$=\pi\left[\frac{x^5}{20}+\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+9x\right]_0^1$

$=\frac{259\pi}{30}$ u.v.

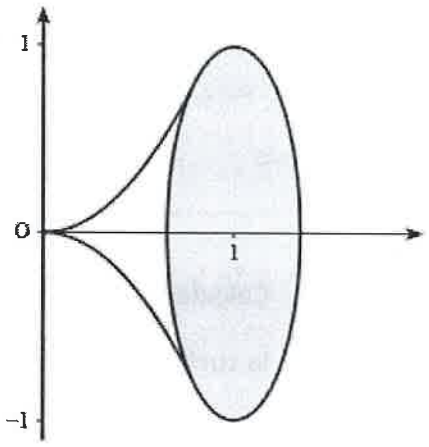
2. Calcule le volume *V* du phare ci-contre obtenu par révolution autour de l'axe *Oy* du morceau de parabole d'équation $y=x^2$ $(0\le x\le 2)$.

$y=x^2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{y}$



$V=\pi\int_0^4(\sqrt{y})^2dy=\pi\int_0^4 y\,dy=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4=8\pi$ u.v.

3. Détermine le volume de la trompette obtenue par révolution autour de l'axe *Ox* du morceau de parabole d'équation $y = x^2$ avec $0 \leq x \leq 1$.



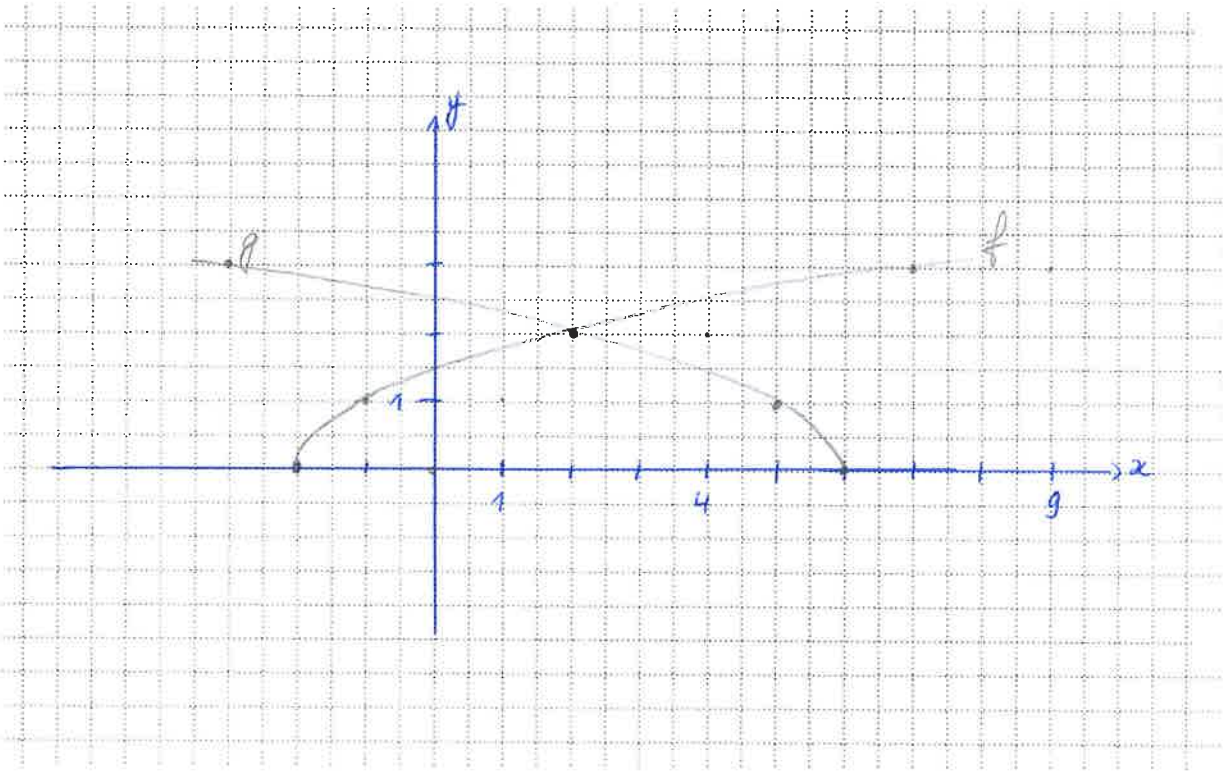
$$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^4 dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{5} \text{ u.v.}$$

4. (1) Représente le graphique des fonctions $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $g(x) = \sqrt{6-x}$ dans un même repère.



(2) Calcule le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface délimitée par le graphique des fonctions *f* et *g* et par l'axe des abscisses.

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (f(x))^2 dx + \pi \int_{2}^{6} (g(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} (x+2) dx + \pi \int_{2}^{6} (6-x) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{2} + \pi \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_{2}^{6}$$

$$= \pi (6+2) + \pi (18-10)$$

$$= 16\pi \text{ u.v.}$$

5. Calcule le volume engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses, de la surface délimitée par le graphique de la fonction $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=1$.

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{(x-2)^2}\,dx=\pi\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{x^2-4x+4}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2-4x+4 \\ \hline -(x^2-4x+4) & 1 \\ \hline 4x-4 & \end{array}$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\left(1+\frac{4x-4}{(x-2)^2}\right)dx$$

↳ Décomposons : $\dfrac{4x-4}{(x-2)^2}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}\Leftrightarrow 4x-4=A\cdot(x-2)+B$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4=A\\-4=-2A+B\end{cases}\rightarrow B=4$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\left(1+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$=\pi\left[x+4\cdot\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\pi\cdot(5-4{,}73)$$

$$=0{,}27\pi\ u.v.$$

6. Calcule la valeur moyenne de la fonction $f(x)=\dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

$$\frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\int_{1/2}^{3/2}\frac{1}{x}\,dx=\left[\ln|x|\right]_{1/2}^{3/2}=\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{1}{2}=1{,}098$$

7. Calcule la valeur moyenne de la fonction $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur l'intervalle $[4;9]$.

$$\frac{1}{9-4}\int_{4}^{9}\frac{2}{\sqrt{x}}\,dx=\frac{2}{5}\int_{4}^{9}x^{-1/2}\,dx=\frac{2}{5}\left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_{4}^{9}=\frac{4}{5}\left[\sqrt{x}\right]_{4}^{9}=\frac{4}{5}\cdot(3-2)=\frac{4}{5}.$$

8. La vitesse d'un automobiliste, en km/h, est donnée par la fonction $V(x)=100-\dfrac{5000}{x+50}$ où x est le temps en heure.

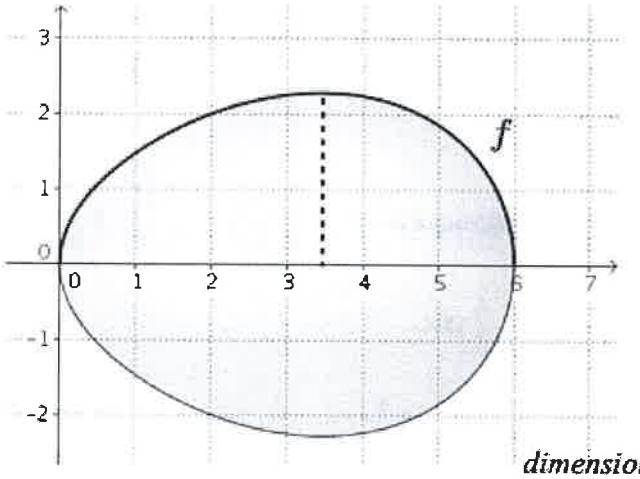
Calcule sa vitesse moyenne entre 2 et 5 heures.

$$\frac{1}{5-2}\int_{2}^{5}\left(100-\frac{5000}{x+50}\right)dx=\frac{1}{3}\left[100x-5000\cdot\ln|x+50|\right]_{2}^{5}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(-19256{,}22+19556{,}22)$$

$$=0$$

9. Cocotte a l'immense fierté de vous faire part de la ponte de son œuf de révolution, qu'elle a engendré par une patiente rotation de la représentation graphique de la fonction $f(x)=\frac{1}{4}\sqrt{x(36-x^2)}$ autour de l'axe Ox, pour x compris entre 0 et 6 :



dimensions en cm

a. Cocotte a-t-elle accompli l'exploit de pondre un œuf de plus de 60cm³ ?

$$V=\pi\int_0^6\left(\frac{1}{4}\sqrt{x.(36-x^2)}\right)^2dx=\frac{\pi}{16}\int_0^6(x.(36-x^2))\,dx$$

$$=\frac{\pi}{16}\int_0^6(36x-x^3)\,dx=\frac{\pi}{16}\left[18x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^6=\frac{\pi}{16}.324=\frac{81\pi}{4}\approx 63,62\ cm^3$$

⇒ Cocotte a accompli cet exploit.

b. Détermine avec une précision au centième de centimètre le rayon maximal de l'œuf (en pointillé sur le dessin).

On cherche une racine de f'. (c'est un problème d'optimisation)

$$f'(x)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{x.(36-x^2)}\right)'$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(x.(36-x^2))'}{2\sqrt{x.(36-x^2)}}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(36-x^2)+x.(-2x)}{2.\sqrt{x.(36-x^2)}}$$

$$=\frac{36-3x^2}{8\sqrt{x.(36-x^2)}}$$

Racines : $f'=0\Leftrightarrow x^2=12$

$\Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$.

Le rayon maximal de l'œuf est donc de $f(2\sqrt{3})\approx 2,28\ cm$.

10. Détermine la longueur de l'arc de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x^3}-\sqrt{x}$ pour $x\in[0;4]$.

$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{x^2}{2\sqrt{x^3}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$L=\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{x^2}{2\sqrt{x^3}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^4\sqrt{1+\frac{x^4}{4x^3}-2\cdot\frac{x^2}{2\sqrt{x^3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4x}}\,dx$$

$$=\int_0^4\sqrt{1+\frac{x^4}{4x^3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x}}\,dx$$

$$=\int_0^4\sqrt{\frac{x^4}{4x^3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x}}\,dx$$

$$=\int_0^4\sqrt{\left(\frac{x^2}{2\sqrt{x^3}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^4\left(\frac{x^2}{2\sqrt{x^3}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=\int_0^4\left(\frac{1}{2}x^{1/2}+\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_0^4$$

$$=\left[\frac{1}{3}\sqrt{x^3}+\sqrt{x}\right]_0^4$$

$$=\frac{14}{3}\ u.l.$$

11. Soit L la longueur de l'arc de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=x^2-\frac{\ln x}{8}$ sur l'intervalle $[1;k]$.

Détermine la valeur de L en fonction du paramètre k.

$f'(x)=2x-\frac{1}{8x}$

$$L=\int_1^k\sqrt{1+\left(2x-\frac{1}{8x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^k\sqrt{1+4x^2-2\cdot 2x\cdot\frac{1}{8x}+\frac{1}{64x^2}}\,dx$$

$$=\int_1^k\sqrt{1+4x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2}}\,dx$$

$$=\int_1^k\sqrt{4x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^2}}\,dx$$

$$=\int_1^k\sqrt{\left(2x+\frac{1}{8x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^k\left(2x+\frac{1}{8x}\right)dx$$

$$=\left[x^2+\frac{1}{8}\cdot\ln x\right]_1^k$$

$$=k^2+\frac{1}{8}\cdot\ln k-1$$