UAA 7 :

Nombres complexes

Opération simple avec des nombres complexes

$$i + i = 2i$$

Opération complexe avec des nombres simples

$$\sqrt{\frac{(0+1)^0 - \sqrt[3]{1}}{e^0}} = 0$$

Objectifs : Nombres complexes $6^{ème}$ 6h

L'élève doit SAVOIR :

1. Définir "nombre complexe".
1. Donner le conjugué d'un nombre complexe.
2. Démontrer que tout nombre complexe admet deux racines carrées complexes, parfois confondues.
3. Démontrer que, dans l'ensemble des nombres complexes, toute équation du second degré admet deux racines carrées.
4. Expliquer les notions de point-image et d'affixe.
5. Définir "module" et "argument" d'un nombre complexe et donner les formules et notations associées.
6. Démontrer la propriété du produit de deux nombres complexes.
7. Démontrer la propriété du quotient de deux nombres complexes.
8. Démontrer la formule de de Moivre.
9. Donner la formule des racines $n^{ème}$ d'un nombre complexe et la démontrer.
10. Donner et représenter la transformation géométrique associée à la somme de deux nombres complexes, à la multiplication d'un complexe par un réel, à la multiplication de deux nombres complexes.

L'élève doit ETRE CAPABLE DE :

1. Additionner, soustraire, multiplier, diviser des nombres complexes (en utilisant la forme algébrique et la forme trigonométrique).
2. Calculer les racines carrées d'un nombre complexe.
3. Résoudre des équations dans $\mathbb{C}$, en particulier des équations du second degré.
4. Représenter un nombre complexe dans un plan gaussien.
5. Ecrire un nombre complexe sous forme trigonométrique ou algébrique, et passer d'une écriture à l'autre.
6. Calculer les racines $n^{ème}$ d'un nombre complexe.
7. Utiliser le lien entre les opérations dans $\mathbb{C}$ et la géométrie plane pour résoudre des exercices.

A. Activité

Tu connais des formules pour résoudre des équations du second degré, avec des critères pour connaître le nombre de solutions. La résolution de telles équations était connue des Babyloniens vers 1700 ans avant J.-C.
L'étude de la résolution des équations du troisième degré aboutit en 1545 avec la publication, dans l'*Ars Magna* de Jérôme Cardan, de la formule découverte par Scipion dal Ferro.

Jérôme Cardan
(1501-1576)

Une équation de la forme $x^3 + px + q = 0$ admet au moins une solution. Celle-ci est donnée par

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{108}}} .$$

(1) En utilisant la formule publiée par Cardan, résous, dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^3 - 3x + 2 = 0$.
Songe que, si x_1 est une racine de l'équation, celle-ci peut aussi s'écrire $\left(x - x_1\right)\left(x^2 + mx + n\right) = 0$.

(2) Si on essaie de faire de même avec l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$, on ne peut pas trouver de solution car $4p^3 + 27q^2$ est strictement négatif et on ne peut donc pas en calculer la racine carrée.
Des algébristes italiens du XVIe siècle, Bombelli en particulier, eurent l'audace de continuer les calculs en utilisant un nombre "i" défini par $i^2 = -1$. Ce nombre sera noté plus tard *i* par Euler, en 1777.

Raphaël Bombelli
(1526-1572)

En utilisant l'identité remarquable $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, vérifie que $(2+i)^3 = 2+11i$ et $(2-i)^3 = 2-11i$

En utilisant l'égalité $i^2 = -1$, montre que 4 est une racine de l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Termine la résolution de l'équation.

Ce nouveau nombre, qui n'est pas un réel, t'a permis de trouver une solution réelle de l'équation !

B. Vocabulaire, notations et propriétés

1. Forme algébrique

Définition : Tout **nombre complexe** s'écrit de manière unique sous la forme dite algébrique $z = a + bi$, où a et b sont des réels et $i^2 = -1$.

a s'appelle la **partie réelle** du complexe z et est notée $\mathrm{Re}(z)$ et b s'appelle la **partie imaginaire** du complexe z et est notée $\mathrm{Im}(z)$.

En particulier,

- si $b \neq 0$, alors $z = a + bi$ est appelé complexe imaginaire
- si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $z = bi$ est dit complexe imaginaire pur
- si $b = 0$, alors $z = a$ est un réel. Ainsi, tout réel est un complexe.

L'ensemble des nombres de la forme $a + bi$, est l'ensemble des nombres complexes et est noté $\mathbb{C}$.

Définition : Le nombre complexe $\overline{z} = a - bi$ est appelé le **conjugué** de $z = a + bi$.

2. Opérations

La **somme** de deux nombres complexes est définie par :

$$(a+bi)+(c+di) = a+bi+c+di = (a+c)+(b+d)i$$

Le **produit** de deux nombres complexes est défini par :

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Pour **diviser** le complexe z par le complexe z', on multiplie z et z' par le conjugué de z' et on écrit le quotient $\frac{z}{z'}$ sous sa forme algébrique $a + bi$.

Exemples : $(2+3i)+(5-4i)=7-i$

$$(2+3i)(2-4i)=2.2-2.4i+3i.2-12i^2=4-8i+6i+12=16-2i$$

$$(2+3i)^2=2^2+2.2.3i+(3i)^2=4+12i-9=-5+12i$$

$$\frac{3+i}{2-3i}=\frac{(3+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{6+9i+2i-3}{2^2-(3i)^2}=\frac{3+11i}{4+9}=\frac{3}{13}+\frac{11}{13}i$$

3. Propriétés

Soit $z,\ z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$.

- $z_1+z_2=z_2+z_1$ L'addition dans $\mathbb{C}$ est commutative.
- $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ L'addition dans $\mathbb{C}$ est associative
- $z+0=0+z=z$ (où $0=0+0i$) 0 est le neutre pour l'addition dans $\mathbb{C}$
- L'opposé de z est $-z$ tel que $z+(-z)=(-z)+z=0$. Si $z=a+bi$, alors $-z=-a-bi$.

Exercices :

1. Calcule et donne la réponse sous la forme $a+bi$:

(1) $(3-5i)+(-2+2i)$

(2) $2(3-i)+5(2+3i)$

(3) $(4-2i)(3+5i)$

(4) $\dfrac{1}{1+i}$

(5) $\dfrac{i}{i-1}$

(6) $\dfrac{4-i}{2-i}+\dfrac{4+i}{2+i}$

(7) $\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$

2. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes ; donne les solutions sous leur forme algébrique :

(1) $iz+2(z-i)=0$

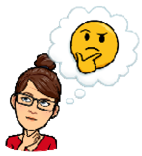
(2) $\dfrac{2}{z-i}=1-i$

(3) $(z+2i)\left((2+i)z-3+i\right)=0$

(4) $z+2\overline{z}=9+2i$

Pour résoudre une équation faisant apparaître un nombre complexe z et son conjugué $\overline{z}$, on pose $z=a+bi$. Résoudre l'équation revient alors à déterminer les valeurs de a et b.

__Pour chercher :__



1. (1) Démontre que la somme des conjugués de deux nombres complexes est égale au conjugué de la somme de ces deux nombres.

   (2) Démontre que le produit des conjugués de deux nombres complexes est égal au conjugué du produit de ces deux nombres.

   (3) En est-il de même pour le quotient ?

2. Vérifie que $-8+2\sqrt{3}+i\left(12+4\sqrt{3}\right)=\left(1+\sqrt{3}+i2\sqrt{3}\right)^2$

__Remarque :__ Dans $\mathbb{R}$, il est impossible de trouver des nombres dont le carré est négatif. Dans $\mathbb{C}$, cela devient possible…

On a prolongé les opérations (addition et multiplication) avec leurs propriétés, mais on a perdu une autre propriété des réels : l'ordre ! Dans $\mathbb{R}$, deux nombres quelconques x et y peuvent toujours être comparés : on a $x \le y$ ou $x > y$. Une des conséquences de l'ordre dans $\mathbb{R}$ est la règle des signes, en particulier on sait qu'un carré, qui est le produit de deux nombres de même signe, est un nombre positif.

L'ordre de $\mathbb{R}$ ne peut donc pas être prolongé dans $\mathbb{C}$ puisque, dans $\mathbb{C}$, il existe des carrés négatifs. Ainsi, le nombre i ne peut être comparé à 0, le nombre i n'est pas positif et n'est pas négatif.

4. Racines carrées

On a défini i tel que $i^2 = -1$. Autrement dit, i est une racine carrée de -1.

Calcule $(-i)^2 = \ldots\ldots\ldots$

Que peut-on en conclure quant au nombre de racines carrées de -1 ? ……………

Ecris -36 sous la forme d'un carré, sans signe moins. ………………

Quelles sont alors les racines carrées de -36 ? …………………

Définition : z est une racine carrée de u si et seulement si $z^2 = u$.

Propriété : Tout nombre complexe admet deux racines carrées complexes, parfois confondues.

RACINES CARREES D'UN NOMBRE COMPLEXE - DEMONSTRATION

https://youtu.be/Cj2l7eNjZ7o

Démonstration :

Exemple : Calculons les racines carrées de $5-12i$.

RACINES CARREES D'UN NOMBRE COMPLEXE - EXEMPLE

https://youtu.be/31h51V4kjoI

Exercice : Calcule les racines carrées des complexes suivants :

(1) -5

(2) $-2i$

(3) $7+24i$

(4) $3-4i$

5. Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

Propriété : Dans $\mathbb{C}$, toute équation du second degré admet deux solutions.

EQUATIONS COMPLEXES DU SECOND DEGRE

https://youtu.be/jib1_vB_2qk

Démonstration :

Exemples :

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2+3z+9=0$

   $\Delta=3^2-4.2.9=9-72=-63=63i^2$

   ➔ $z_1=\dfrac{-3+i\sqrt{63}}{4}$ et $z_2=\dfrac{-3-i\sqrt{63}}{4}$

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-z+3i-1=0$

   $\Delta=(-1)^2-4.1.(3i-1)=1-12i+4=5-12i$

   ➔ $z_1=\dfrac{1+(3-2i)}{2}=2-i$ et $z_2=\dfrac{1-(3-2i)}{2}=-1+i$

Exercice : Résous dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et écris les solutions sous forme algébrique :

(1) $3z^2-4z+2=0$

(2) $z^2+(3-2i)z-6i=0$

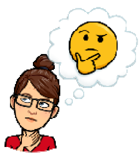
(3) $z^2-(1+2i)z+i-1=0$

(4) $(1+i)z^2+4=4z$

(5) $z^2-(6+i)z+7+9i=0$

(6) $(2-4i)z^2+(8-10i)z+7-6i=0$

Pour chercher :



1. Résoudre l'équation (en nombres complexes) : $(2z^2-1)^3=(z^2+1)^3$. (*Examen d'admission, ULg, 2003*)

2. Résous l'équation suivante : $\left(\dfrac{z-2i}{z+2i}\right)^3+\left(\dfrac{z-2i}{z+2i}\right)^2+\left(\dfrac{z-2i}{z+2i}\right)+1=0$ (*UMons, juillet 2003*)

   Sol : $S=\{0;-2;2\}$

C. Représentation géométrique d'un nombre complexe

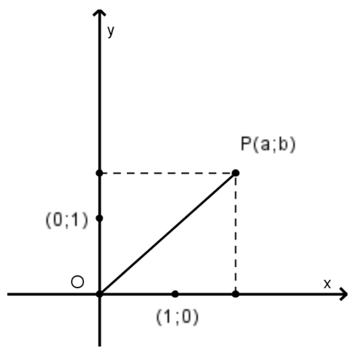
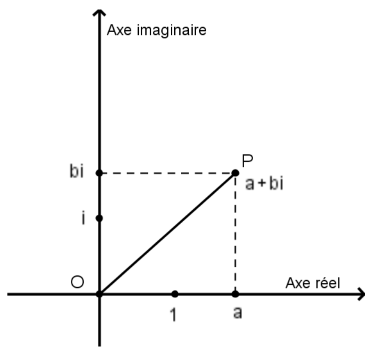
La relation définie par $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : (a,b) \mapsto a+bi$ est telle que

- tout couple de réels a pour image **un et un seul** nombre complexe ;
- tout nombre complexe est l'image d'**un et un seul** couple de réels.

Une telle relation porte le nom de **bijection**.

Ainsi, tout nombre complexe $a+bi$ peut se représenter par le point *P* de coordonnées $(a;b)$ dans un plan muni d'un repère orthonormé. Et il aura fallu trois siècles pour mettre au point cette interprétation géométrique : les nombres complexes vivent dans un monde à deux dimensions.

Définition : On appelle *P* le **point-image** du nombre complexe $a+bi$ et on appelle $a+bi$ l'**affixe** du point *P*.

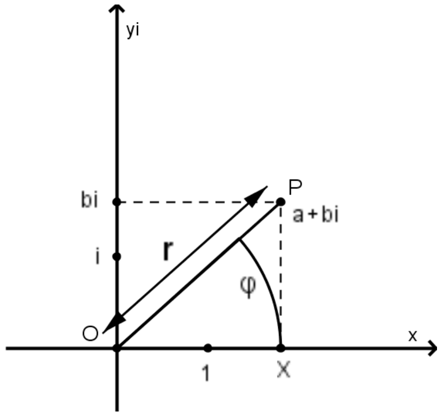
	
Plan cartésien	Plan gaussien

On appelle **plan de Gauss** (ou plan gaussien) le plan muni d'un repère orthonormé représentant l'ensemble des nombres complexes.
Dans ce plan, l'axe des abscisses est **l'axe réel** et l'axe des ordonnées est **l'axe imaginaire**.

D. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition : Soit P, le point-image de $a+bi$ dans le plan de Gauss,

- **le module r** du nombre complexe non nul $a+bi$ est la distance du point P à l'origine O du repère ;
- **l'argument φ** du nombre complexe non nul $a+bi$ est une mesure de l'angle orienté de côté origine $[OX$ et de côté extrémité $[OP$.



Comment calculer r et φ, et comment écrire un nombre complexe en fonction de r et φ ?

Propriété : Le module du nombre complexe non nul $a+bi$ est donnée par $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

Propriété : L'argument φ du nombre complexe non nul $a+bi$ est donné par $\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Propriété : Le nombre complexe non nul $a+bi$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} a+bi &= \frac{ra}{r}+\frac{rb}{r}i \\ &= r\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{r}i\right) \\ &= r(\cos\varphi+i\ \sin\varphi) \\ &= r\ cis\varphi \quad \text{(forme trigonométrique)} \end{aligned}$$

Notation : Le module du nombre complexe z se note $|z|$.

Exemples :

(1) Le nombre complexe $\sqrt{3}-i$ a pour

- module: $r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=2$
- argument : $-\frac{\pi}{6}$ car $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\varphi=\frac{-1}{2}$
- forme trigonométrique : $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\,\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ou $2cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

(2) $1=cis\,0$

$-1=cis\,\pi$

$i=cis\frac{\pi}{2}$

$-i=cis\frac{3\pi}{2}$

Propriété : Deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments sont égaux à un multiple entier de 2π près, c'est-à-dire $r\,cis\varphi=s\,cis\,\theta \Leftrightarrow \begin{cases} r=s \\ \varphi=\theta+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$.

Propriété : Le produit de deux nombres complexes non nuls a pour module le produit des modules des deux nombres et pour argument la somme des arguments des deux nombres.

PRODUIT DE DEUX NOMBRES COMPLEXES - DEMONSTRATION

https://youtu.be/qGyzULSiAPE

Démonstration :

Remarque : $cis\,\varphi_1.cis\,\varphi_2 = cis\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$

Propriété : Le quotient de deux nombres complexes non nuls a pour module le quotient des modules des deux nombres et pour argument la différence des arguments des deux nombres.

QUOTIENT DE DEUX NOMBRES COMPLEXES - DEMONSTRATION

https://youtu.be/8IMj2Wx7SSc

Démonstration :

Remarque : $\dfrac{cis\,\varphi_1}{cis\,\varphi_2} = cis\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$

Propriété : Pour tout naturel n non nul, $\left(cis\,\varphi\right)^n = cis\,n\varphi$. (formule de **de Moivre**)

FORMULE DE DE MOIVRE - DEMONSTRATION

https://youtu.be/Z9I6qz810x8

Démonstration :

Le saviez-vous ?

C'est au mathématicien italien Giuseppe Peano (1858-1932), ci-contre, que l'on attribue le principe de raisonnement par récurrence. Le nom a probablement été donné par Henri Poincaré (1854-1912).

Propriété : Pour tout naturel non nul, $(r\,cis\,\varphi)^n = r^n\,cis\,n\varphi$.

Exercices :

1. Ecris les complexes suivants sous leur forme trigonométrique :
   (1) -12
   (2) $1+i\sqrt{3}$
   (3) $\sqrt{3}-3i$
   (4) $-16+16i$

2. Ecris les complexes suivants sous leur forme algébrique :
   (1) $\cos 45° + i\sin 45°$
   (2) $2(\cos 120° + i\sin 120°)$
   (3) $-3\,cis\,300°$
   (4) $3\,cis\,210°$

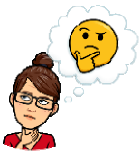
3. Soit le nombre complexe $z = \sqrt{3} - i$.
   Calcule le module et l'argument de z, de $3i - z$ et de $3i + 3z$.

4. Calcule et écris sous la forme algébrique :
   (1) $\left(2\,cis\dfrac{\pi}{3}\right)^2$
   (2) $cis\,45°.cis\,30°$
   (3) $(-3-3i)^7$
   (4) $\dfrac{12\,cis\,60°}{4\,cis\,15°}$

(5) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5(2-2i)^6$

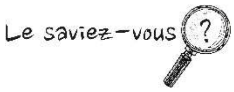
5. Comment choisir l'entier naturel n pour que $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ soit un réel ? un imaginaire ?

<u>Pour chercher :</u>



1. Calcule la partie réelle de $\frac{1}{1+iz}$ lorsque $|z|=1$ ($z\in\mathbb{C}$). *Sol* : $\frac{1}{2}$

2. Calcule le module de $2i(3+i)(1+i)$. *Sol :* $\sqrt{80}$



$e^{i\pi}+1=0$ *est, selon Euler, la plus belle formule mathématique car elle réunit les cinq nombres les plus importants en mathématiques : 0, 1,* π *, e et i.*

E. Racines $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe

Définition : x est une racine $n^{\text{ème}}$ du complexe z si et seulement si $x^n = z$.

Propriété : Tout nombre complexe $z = r\,cis\,\varphi$ admet n racines $n^{\text{èmes}}$ distinctes données par $z_k = \sqrt[n]{r}\,cis\,\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}, k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

RACINES N D'UN NOMBRE COMPLEXE - DEMONSTRATION

https://youtu.be/Dc9Ty1TodAc

Démonstration :

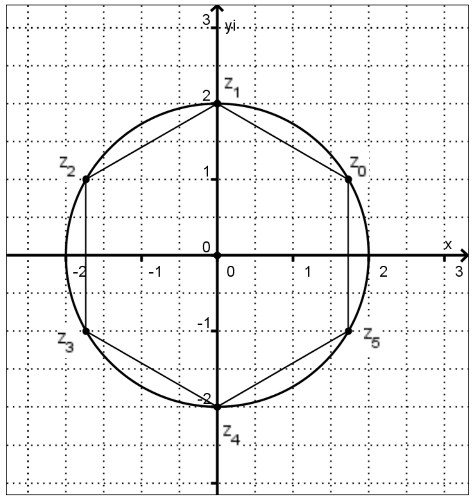
Propriété : Dans le plan de Gauss, les racines $n^{\text{èmes}}$ du nombre complexe $r\,cis\,\varphi$ sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit au cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$ et de centre O.

Exemple : Recherchons et représentons les racines sixièmes de -64.

(1) $-64 = 64\,cis\,\pi$

(2) $\sqrt[6]{64} = 2$

(3) $z_0 = 2.cis\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3} + i$



$z_1 = 2\,cis\dfrac{\pi}{2} = 2i$

$z_2 = 2\,cis\dfrac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} + i$

$z_3 = 2\,cis\dfrac{7\pi}{6} = -\sqrt{3} - i$

$z_4 = 2\,cis\dfrac{3\pi}{2} = -2i$

$z_5 = 2\,cis\dfrac{11\pi}{6} = \sqrt{3} - i$

Exercices :

1. Soit le complexe $z = \sqrt{3} - i$.
   (1) Calcule les racines carrées du complexe z écrit sous forme trigonométrique.
   (2) Vérifie le résultat trouvé en (1) par la méthode algébrique.

2. Calcule les racines cubiques de i.
   Ecris-les sous forme algébrique.
   Représente les racines cubiques dans le plan de Gauss.

3. Calcule les racines cinquièmes de $-\sqrt{3} + i$ sous forme trigonométrique (en degrés).
   Représente les racines cinquièmes dans le plan de Gauss.

4. Calcule les racines sixièmes de $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ sous forme trigonométrique (en degrés). Représente les racines sixièmes dans le plan de Gauss.

5. Résous l'équation $z^3-2-i=0$ dans $\mathbb{C}$ et porte dans le plan de Gauss les points dont les affixes sont les solutions trouvées.

F. Opérations dans $\mathbb{C}$ et géométrie plane

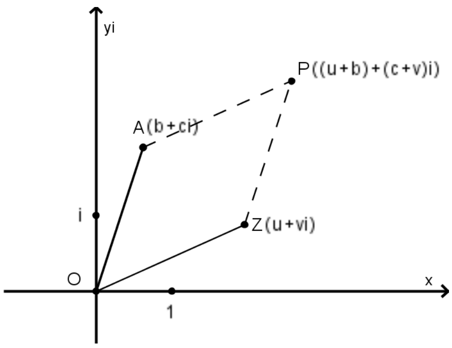
On considère un plan de Gauss muni d'un repère orthonormé dont l'origine est *O*.

1. Ajouter un complexe à un complexe donné

Propriété : Soient $\left| \begin{array}{l} z = u + vi, \text{ un complexe quelconque, affixe du point } Z \\ a = b + ci, \text{ un complexe donné, affixe du point } A \end{array} \right.$.

Le point *P*, d'affixe $z + a = (u + vi) + (b + ci) = (u + b) + (v + c)i$, est le quatrième sommet du parallélogramme dont *Z*, *O* et *A* sont trois sommets consécutifs.

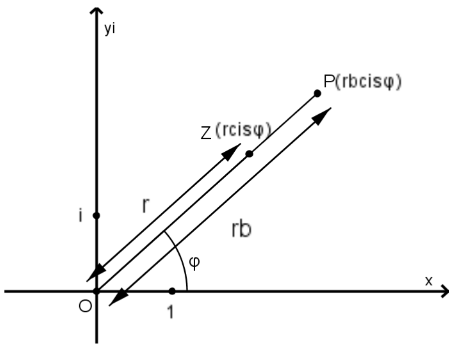
On en déduit, d'un point de vue géométrique, qu'ajouter un complexe quelconque à un complexe donné $\left(\text{l'application } \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z + a\right)$, correspond à une translation de vecteur d'affixe a $\left(\overrightarrow{OA}\right)$



2. Multiplier un complexe par un réel donné

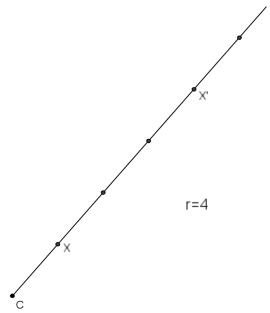
Propriété : Soient $\left| \begin{array}{l} z = r\,cis\,\varphi, \text{ un complexe quelconque, affixe du point } Z \\ b, \text{ un réel donné} \end{array} \right.$.

Le point *P*, d'affixe $zb = rb\,cis\,\varphi$, a pour module $|rb|$ et pour argument φ.



On en déduit, d'un point de vue géométrique, que multiplier un complexe quelconque par un réel donné $\left(\text{l'application } \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto zb\right)$, correspond à une homothétie de centre *O* et de rapport *b*.

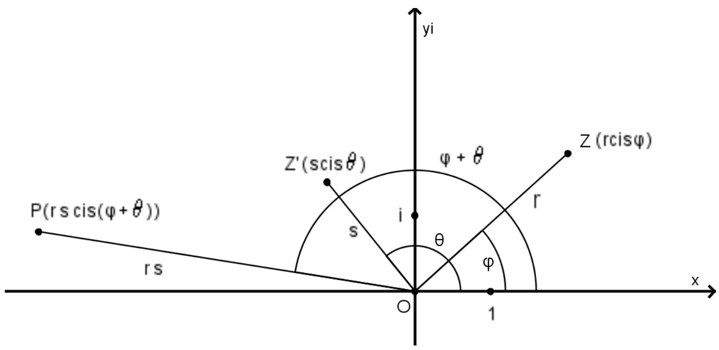
Dans l'espace (comme dans le plan), **<u>l'homothétie</u>** de **centre** C et de **rapport** r est la transformation h de l'espace (ou du plan) qui, à chaque point X, fait correspondre le point X' tel que C, X et X' sont alignés et que $\overrightarrow{CX'} = r\overrightarrow{CX}$.



3. Multiplier un complexe par un complexe donné

<u>Propriété :</u> Soient $\left| \begin{array}{l} z = r\,cis\,\varphi, \text{ un complexe quelconque, affixe du point } Z \\ z' = s\,cis\,\theta, \text{ un complexe donné, affixe du point } Z' \end{array} \right.$.

Le point P, d'affixe $zz' = (r\,cis\,\varphi).(s\,cis\,\theta) = rs\,cis(\varphi+\theta)$, a pour module rs et pour argument $\varphi+\theta$.



On en déduit, d'un point de vue géométrique, que multiplier un complexe quelconque par un complexe donné $\left(\text{l'application } \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto zz'\right)$, correspond à une rotation de centre O et d'angle d'amplitude égale à θ suivie d'une homothétie de centre O et de rapport égal à s.

4. Exercices

1. A quelle transformation du plan correspond
   (1) l'addition de i à tout complexe z ?
   (2) la multiplication par i de tout complexe z ?

2. Quelle est l'affixe (sous forme trigonométrique) du point P' du plan de Gauss d'origine O, image du point P d'affixe $-1-i$

   (1) par la translation de vecteur d'affixe i ?

   (2) par l'homothétie de centre O et de rapport -2 ?

   (3) par la rotation de centre O et d'angle $-90°$?

3. Dans le plan gaussien, représente le point P d'affixe $z=1+i$ et le point Q d'affixe $t=1-i$.

   (1) Construis géométriquement le point S d'affixe $z+t$ et décris la(les) transformation(s) du plan utilisée(s).

   (2) Construis géométriquement le point T d'affixe $4z-5t$ et décris la(les) transformation(s) du plan utilisée(s).

   (3) Construis géométriquement le point U d'affixe zt et décris la(les) transformation(s) du plan utilisée(s).

G. Forme exponentielle

Le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) a établi une égalité exprimant à l'aide d'une exponentielle, tout nombre complexe écrit sous sa forme trigonométrique.
En 1740, il démontra que :

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i.\sin\varphi$$
$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$
$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}$$

Définition : Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument φ s'écrit sous sa forme exponentielle $z = r.e^{i\varphi}$.

Exercices :

1. Ecris les nombres complexes suivants sous leur forme algébrique $a+bi$:

   (1) $e^{i\frac{\pi}{6}}$

   (2) $4.e^{i\frac{\pi}{4}}$

2. Ecris les nombres complexes suivants sous leur forme exponentielle :
   (1) $-2i$
   (2) -5
   (3) $2\sqrt{3}+6i$

3. Ecris les nombres complexes $e^{i\varphi} + e^{i2\varphi}$ et $1+e^{i\varphi}$ sous forme trigonométrique.

H. Applications

1. Détermine l'ensemble des points d'affixe z du plan de Gauss

   (1) qui vérifient la relation $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-4i}{z+2}\right)=0$.

   (2) tels que $\dfrac{z+1}{z-2i}$ soit un réel.

   (3) tels que $\dfrac{z+1}{z-2i}$ soit un imaginaire pur.

2. Détermine dans le plan de Gauss l'ensemble des nombres complexes z tels que $z+\overline{z}=|z|$.

3. Détermine dans le plan de Gauss tous les points d'affixe z tels que $z.\overline{z}=4$.

4. (1) D est le point de coordonnées $\left(\sqrt{3};3\right)$. Quelle est son affixe ?

   (2) On donne les points A, B, C d'affixes respectives :

   $z_A=\sqrt{3}+i$; $z_B=-\sqrt{3}-i$; $z_C=2i$.

   Calcule le module et un argument pour ces trois affixes. Que peut-on déduire pour les points A, B, C ?

   (3) Place les points A, B, C, D dans un plan gaussien.

   (4) Quelle est la nature du quadrilatère $AOCD$? Pourquoi ?

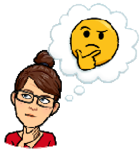
   (5) Quelle est l'affixe du point E telle que $ODEB$ soit un parallélogramme ?

5. Résous l'équation $z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12=0$ sachant qu'elle a une racine réelle.

6. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z|^2-2z+6i-15=0$. *(ULB 2001)*

7. Résoudre dans les complexes, l'équation suivante : $z^6+2iz^3-1=0$. Donner les solutions sous la forme $a+bi$ (avec a et b réels). *(UCL 2001)*

Pour chercher :



1. Détermine tous les nombres complexes z tels que $\left(z-\bar{z}\right)^2 = |z|^2$.

(*Examen d'admission, EPL, Juillet 2018*)

2. Résoudre l'équation : $z^2 = -\dfrac{3}{\sqrt{5}}|z| + 4i$.

   Suggestion : Egaler les modules des deux membres pour déterminer $|z|$.

   (*Examen d'admission, ULG, Juillet 2000*)

   Sol : $z_1 = 1+2i$ et $z_2 = -1-2i$

3. On note *j* un nombre complexe, solution de l'équation $1+z+z^2=0$.

   On peut alors affirmer que $\left(j+j^2+j^3\right)^3$ est égal à :

   (1) 0

   (2) 1

   (3) j

   (4) j^2

   (*Concours Avenir, Mai 2019*)

   Sol : (1)

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$.

   (*Examen d'admission, ULB, FacSA, Juillet 2009*)