NOMBRES COMPLEXES

Forme trigonométrique et racines $n^{\text{ème}}$

C. SCOLAS

https://bit.ly/44bfZTB

QVC

1. Détermine la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

(1) $z = 3+3i$

$r = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\cos\varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

$z = 3\sqrt{2}.\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$

(2) $z = -1-\sqrt{3}i$

$r = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$

$\cos\varphi = \frac{-1}{2}$ et $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \varphi = \frac{4\pi}{3}$

$z = 2.\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$

(3) $z = -\frac{4}{3}i$

$r = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}$

$\cos\varphi = 0$ et $\sin\varphi = -1$ $\Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}$

$z = \frac{4}{3}.\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$

(4) $z = -2$

$r = \sqrt{(-2)^2} = 2$

$\cos\varphi = -1$ et $\sin\varphi = 0$ $\Rightarrow \varphi = \pi$

$z = 2.\operatorname{cis}\pi$

(5) $z = (2+i)(3-5i) = 6-10i+3i+5 = 11-7i$

$r = \sqrt{11^2+7^2} = \sqrt{170}$

$\cos\varphi = \frac{11\sqrt{170}}{170}$ et $\sin\varphi = \frac{-7.\sqrt{170}}{170}$ $\Rightarrow \varphi = -0{,}57$

$z = \sqrt{170}.\operatorname{cis}(-0{,}57)$

2. Détermine la forme algébrique des nombres suivants :

(1) Nombre de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$

$2 \cdot cis\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}\, i$

(2) $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(1 \cdot cis\,\frac{2\pi}{3}\right)^3 = 1^3 \cdot cis\,\frac{2\pi \cdot 3}{3} = 1 \cdot cis\,(2\pi) = 1$

$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

$\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$

(3) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \frac{\left(\sqrt{2} \cdot cis\,\frac{\pi}{4}\right)^9}{\left(\sqrt{2} \cdot cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^7} = \frac{(\sqrt{2})^9 \cdot cis\,\frac{9\pi}{4}}{(\sqrt{2})^7 \cdot cis\left(-\frac{7\pi}{4}\right)} = (\sqrt{2})^2 \cdot cis\,\frac{16\pi}{4} = 2 \cdot cis\,4\pi = 2$

$1+i = \sqrt{2} \cdot cis\,\frac{\pi}{4}$ car $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

$1-i = \sqrt{2} \cdot cis$ car $r = \sqrt{1^2+(1)^2} = \sqrt{2}$

$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}$

(4) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2015} = \left(cis\,\frac{\pi}{3}\right)^{2015} = cis\,\frac{2015\pi}{3} = cis\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

on retire 335 tours de cercle

$\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = cis\,\frac{\pi}{3}$ car $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

$\cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$

3. Soit les nombres complexes $a=\sqrt{3}-i$, $b=2-2i$ et $z=\dfrac{a^4}{b^3}$.

(1) Donne le module (r) et un argument (φ) (en radians) de a, b, a^4 et b^3.

a : $r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \varphi=-\frac{\pi}{6}$ $\rightarrow$ a^4 : $r=2^4=16$

$\varphi=4\cdot\frac{-\pi}{6}=-\frac{2\pi}{3}$

b : $r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

$\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow \varphi=-\frac{\pi}{4}$ $\rightarrow$ b^3 : $r=(2\sqrt{2})^3=16\sqrt{2}$

$\varphi=3\cdot\frac{-\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$

(2) Donne la forme algébrique de a^4 et b^3, puis de z.

$a^4=16\cdot\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=16\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=16\left(-\frac{1}{2}+i\cdot-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-8-8\sqrt{3}i$

$b^3=16\sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=16\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=16\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-16-16i$

$z=\dfrac{16\cdot\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{16\sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\text{cis}\frac{\pi}{12}$!! pas facile de calculer $\text{cis}\frac{\pi}{12}$ $\rightsquigarrow z=\dfrac{-8-8\sqrt{3}i}{-16-16i}\cdot\dfrac{-16+16i}{-16+16i}$

$=\dfrac{128-128i+128\sqrt{3}i+128\sqrt{3}}{512}$

$=\frac{1+\sqrt{3}}{4}+i\cdot\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$

(3) Calcule le module et un argument de z.

$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\varphi=\frac{\pi}{12}$

(4) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ $\longrightarrow$ $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{\cancel{4}\,2}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$ $\longrightarrow$ $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\,\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

4. Détermine l'ensemble des complexes z tels que $(z+1).\frac{1}{z}$ soit réel.

Soit $z = a + bi$.

$$(z+1).\frac{1}{z} = (a+1+bi).\frac{1}{a+bi}.\frac{a-bi}{a-bi}$$

$$= \frac{a^2 - \cancel{abi} + a - bi + \cancel{abi} + b^2}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a^2 + a + b^2 - bi}{a^2+b^2}$$

$(z+1).\frac{1}{z}$ est réel ssi $b=0$ càd ssi z est réel.

5. Calcule les 5 racines 5e du complexe $3-5i$. Donne-les sous forme algébrique et représente-les dans un plan de Gauss.

$z = 3 - 5i$

$r = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$

$\cos\varphi = \frac{3.\sqrt{34}}{34}$ et $\sin\varphi = \frac{-5\sqrt{34}}{34}$ $\Rightarrow \varphi = -1{,}03$ $\rightarrow z = \sqrt{34}.\operatorname{cis}(-1{,}03)$

$z_k = \sqrt[5]{\sqrt{34}}.\operatorname{cis}\frac{-1{,}03+2k\pi}{5} = 1{,}42.\operatorname{cis}\left(-0{,}21 + 2k\frac{\pi}{5}\right)$

$z_0 = 1{,}42.\operatorname{cis}(-0{,}21) = 1{,}39 - 0{,}29i$

$z_1 = 1{,}42.\operatorname{cis} 1{,}05 = 0{,}71 + 1{,}23i$

$z_2 = 1{,}42.\operatorname{cis} 2{,}31 = -0{,}96 + 1{,}05i$

$z_3 = 1{,}42.\operatorname{cis} 3{,}56 = -1{,}3 - 0{,}58i$

$z_4 = 1{,}42.\operatorname{cis} 4{,}82 = 0{,}15 - 1{,}41i$

6. Calcule les racines cubiques de $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} \cdot \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{3+\sqrt{3}i+\sqrt{3}i-1}{3+1} = \dfrac{2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \text{ et } \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$z_k = \sqrt[3]{1}.\ \text{cis}\ \frac{\pi/6+2k\pi}{3} = \text{cis}\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$z_0 = \text{cis}\ \frac{\pi}{18}$$

$$z_1 = \text{cis}\ \frac{13\pi}{18}$$

$$z_2 = \text{cis}\ \frac{25\pi}{18}$$

7. Calcule les racines sixièmes de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{1+i\sqrt{3}+i\sqrt{3}-3}{1+3} = \dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{4} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\cos\varphi = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_k = \sqrt[6]{1}.\ \text{cis}\left(\frac{2\pi/3+2k\pi}{6}\right) = \text{cis}\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$z_0 = \text{cis}\ \frac{\pi}{9}$$

$$z_1 = \text{cis}\ \frac{7\pi}{9}$$

$$z_2 = \text{cis}\ \frac{13\pi}{9}$$

$$z_3 = \text{cis}\ \frac{19\pi}{9}$$

$$z_4 = \text{cis}\ \frac{25\pi}{9}$$

$$z_5 = \text{cis}\ \frac{34\pi}{9}$$

8. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}-i-\sqrt{3}}{1+3} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{-1-\sqrt{3}}{4} i$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{\frac{-1-\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \Rightarrow \varphi = \frac{17\pi}{12}$$

$$z_k = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \text{cis}\left(\frac{\frac{17\pi}{12} + 2k\pi}{4}\right) = 0{,}92 \cdot \text{cis}\left(\frac{17\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z_0 = 0{,}92 \cdot \text{cis}\, \frac{17\pi}{48}$$

$$z_1 = 0{,}92 \cdot \text{cis}\, \frac{41\pi}{48}$$

$$z_2 = 0{,}92 \cdot \text{cis}\, \frac{65\pi}{48}$$

$$z_3 = 0{,}92 \cdot \text{cis}\, \frac{89\pi}{48}$$