

NOMBRES COMPLEXES

Racines carrées et équations

C. SCOLAS



<https://bit.ly/44bfZTB>



Résous les équations suivantes dans l'ensemble des nombres complexes ; donne la(les)

solution(s) sous forme algébrique :

(1) $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$

$$\Delta = (3i - 4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - 7i) = -9 - 24i + 16 - 4 + 28i = 3 + 4i.$$

R.C. de $3 + 4i$: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \quad (1) \\ 2xy = 4 \end{cases}$ On élève chaque équation au carré :
 $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 9$ et $4x^2y^2 = 16$

On additionne membre à membre : $(x^2 + y^2)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \quad (3)$

$$(1) + (3) : 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$(3) - (1) : 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm 1$$

→ Les R.C. de $3 + 4i$ sont $2 + i$ et $-2 - i$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{-(3i - 4) \pm (2 + i)}{2} \begin{cases} \frac{6 - 2i}{2} = 3 - i \\ \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i \end{cases}$$

$$S = \{3 - i; 1 - 2i\}$$

(2) $(i - 1)z^2 - (1 + 2i)z + 1 = 0$

$$\Delta = (-(1 + 2i))^2 - 4 \cdot (i - 1) \cdot 1 = 1 + 4i - 4 - 4i + 4 = 1$$

$$z_{1,2} = \frac{(1 + 2i) \pm 1}{2 \cdot (i - 1)} \begin{cases} \frac{2 + 2i}{2 \cdot (-1 + i)} = \frac{1 + i}{-1 + i} \cdot \frac{-1 - i}{-1 - i} = \frac{-1 - i - i + 1}{1 + 1} = \frac{-2i}{2} = -i \\ \frac{2i}{2 \cdot (i - 1)} = \frac{i}{-1 + i} \cdot \frac{-1 - i}{-1 - i} = \frac{-i + 1}{1 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases}$$

$$S = \{-i; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\}$$

$$(3) z^2 + 2z + 4 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12 = 12i^2$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$S = \{-1 \pm \sqrt{3}i\}$$

$$(4) (2i-4)z^2 - (1+4i)z + 1 = 0$$

$$\Delta = (-(1+4i))^2 - 4 \cdot (2i-4) \cdot 1 = 1 + 8i - 16 - 8i + 16 = 1$$

$$z_{1,2} = \frac{1+4i \pm 1}{2 \cdot (2i-4)} = \begin{cases} \frac{2+4i}{2 \cdot (2i-4)} = \frac{1+2i}{-4+2i} \cdot \frac{-4-2i}{-4-2i} = \frac{-4-2i-8i+4}{16+4} = \frac{-10i}{20} = -\frac{1}{2}i \\ \frac{4i}{2 \cdot (2i-4)} = \frac{2i}{-4+2i} \cdot \frac{-4-2i}{-4-2i} = \frac{-8i+4}{16+4} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \end{cases}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}i, \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \right\}$$

$$(5) (1+i)z^2 - 3z + 2 - i = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot (1+i) \cdot (2-i) = 9 - (4+4i) \cdot (2-i) = 9 - (8-4i+8i+4) = -3-4i$$

R.C. de $-3-4i$: $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ 2xy = -4 \end{cases}$ On élève chaque équation au carré: $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 9$ et $4x^2y^2 = 16$.

On additionne membre à membre: $(x^2+y^2)^2 = 25 \Rightarrow x^2+y^2 = 5$ (3)

$$(1)+(3): 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$(3)-(1): 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y = \pm 2$$

→ Les R.C. de $-3-4i$ sont $-1+2i$ et $1-2i$.

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{3 \pm (1-2i)}{2 \cdot (1+i)} \quad \begin{cases} \frac{4-2i}{2 \cdot (1+i)} = \frac{2-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{2-2i-i-1}{1+1} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \\ \frac{2+2i}{2 \cdot (1+i)} = \frac{1+i}{1+i} = 1 \end{cases}$$

$$S = \left\{ 1; \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \right\}$$

$$(6) 2z^2 + 4z + 5 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 16 - 40 = -24 = 24i^2$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}i}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$S = \left\{ -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}i \right\}$$

