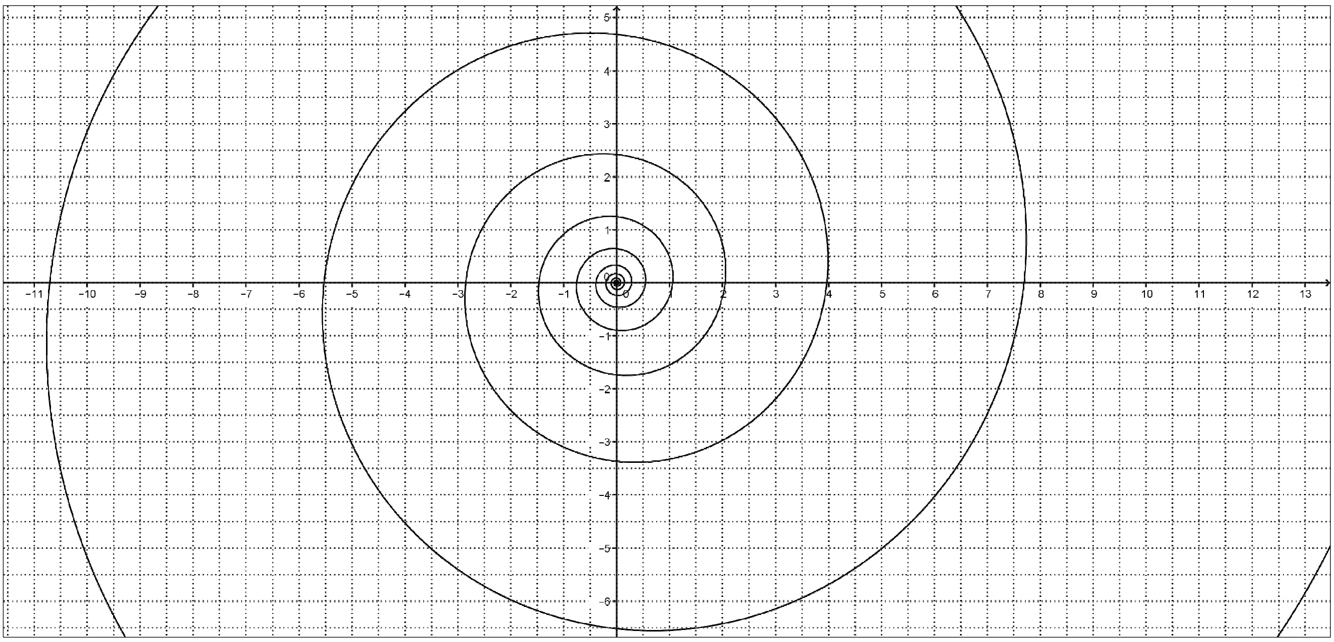
UAA 4 :

Fonctions exponentielles et logarithmiques



Spirale logarithmique

Pierre-Simon de Laplace disait à propos des logarithmes :

« L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes. »

Objectifs : Fonctions exponentielles et logarithmiques **$6^{ème}$ 6h**

L'élève doit ***SAVOIR :***

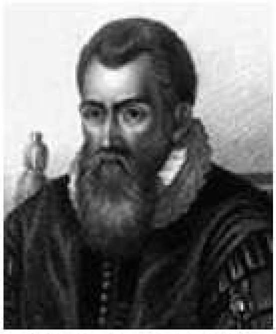
1. Compléter les propriétés des fonctions exponentielles.
2. Donner les équations des asymptotes horizontales des fonctions exponentielles.
3. Compléter les propriétés d'(in)égalités.
4. Donner l'expression du nombre e en terme de limite.
5. Donner la valeur de e .
6. Donner $\left(e^x\right)'$, $\left(e^{f(x)}\right)'$, $\left(a^x\right)'$ et $\left(a^{f(x)}\right)'$.
7. Enoncer le théorème de l'Hospital.
8. Définir "fonction logarithmique de base a".
9. Donner les équations des asymptotes verticales des fonctions logarithmiques.
10. Donner et démontrer les propriétés algébriques des fonctions logarithmiques.
11. Donner et démontrer la formule du changement de base.
12. Donner $\left(\ln x\right)'$, $\left(\ln f(x)\right)'$, $\left(\log_a x\right)'$ et $\left(\log_a f(x)\right)'$.
13. Démontrer la formule de $\left(\ln x\right)'$.
14. Démontrer la formule de $\left(\log_a x\right)'$.

L'élève doit ***ETRE CAPABLE DE :***

1. Esquisser le graphique d'une fonction exponentielle ou d'une fonction logarithmique en fonction de la valeur de la base.
2. Résoudre des (in)équations exponentielles.
3. Utilise l'expression du nombre *e* en termes de limite pour calculer d'autres limites.
4. Dériver des fonctions exponentielles.
5. Calculer des limites, en utilisant le théorème de l'Hospital si nécessaire.
6. Résoudre des (in)équations logarithmiques.
7. Dériver des fonctions logarithmiques.
8. Résoudre un problème lié aux fonctions exponentielles et/ou logarithmiques.

La fin du XVI[e] siècle est l'époque des grands voyages maritimes et de la découverte des lois régissant le mouvement des planètes (Copernic, Kepler, …). Les mesures astronomiques, nécessaires pour la navigation, impliquent des calculs compliqués. Les multiplications, divisions et extractions de racines sont particulièrement longues et pénibles.

John Napier, plus connu en France sous le nom de **Neper**, né à Merchiston Castle, aux environs d'Édimbourg, est préoccupé par ces calculs numériques longs et pénibles. Il concentre toutes ses forces au développement de méthodes susceptibles de réduire ces calculs fastidieux. Après vingt ans de travail, il livre en 1614 son célèbre traité intitulé *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, qui décrit son système de logarithmes et l'usage qu'il veut en faire. Un second ouvrage, intitulé *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, publié en 1619, contient le premier traité ainsi que les procédés de construction des tables de logarithmes. En voici un extrait dans le tableau ci-contre où l'on met en correspondance les nombres de telle manière qu'à la multiplication de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'addition de deux nombres de la colonne de droite.

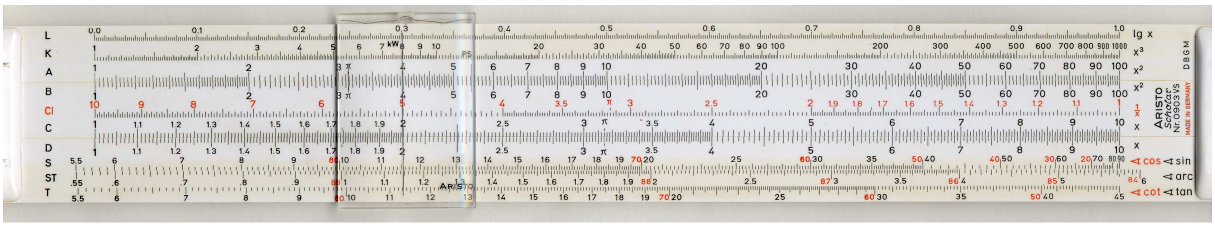


John Napier (1550-1617)

0,1	
0,5	
1	
1,5	
2	0,693
3	1,098
4	1,386
5	1,609
6	1,791
7	1,946
8	2,079
9	2,197
10	2,302
11	2,398
12	2,484
13	2,565
14	2,639
15	2,707
16	2,772
17	2,833
18	2,890
19	2,944
20	2,995
21	
22	
100	

L'Anglais Henry **Briggs** (1561-1630) publia peu après une table des logarithmes décimaux.

La première règle à calcul, basée sur l'échelle logarithmique, apparaît en Angleterre en 1620. Perfectionnée au cours des siècles, elle reste, jusqu'au milieu des années 1970, l'outil indispensable du scientifique et de l'ingénieur pour effectuer des calculs approchés. Elle est remplacée aujourd'hui par la calculatrice !



Les logarithmes n'ont pourtant pas disparu du paysage : l'échelle de Richter, la datation au carbone 14, la mesure de l'intensité du son en décibels, le pH d'une solution sont quelques applications actuelles des logarithmes.

A. Fonctions exponentielles

1. Exponentielles quelconques

Définition : La fonction $f : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR} : x \mapsto a^x$ où $a \in \mathrm{IR}_0^+ \setminus \{1\}$ est appelée **fonction exponentielle de base *a***.

Propriétés : Les fonctions exponentielles ont les mêmes propriétés que les puissances, c'est-à-dire :

$\forall a,b \in \mathrm{IR}_0^+ \setminus \{1\},\ \forall x,y \in \mathrm{IR}$:

$$a^x.a^y = a^{x+y}$$

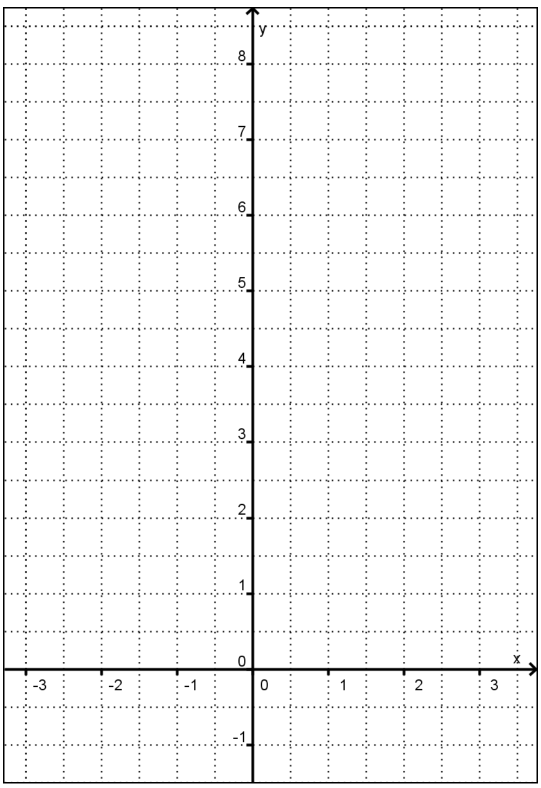
$$(a.b)^x = a^x.b^x$$

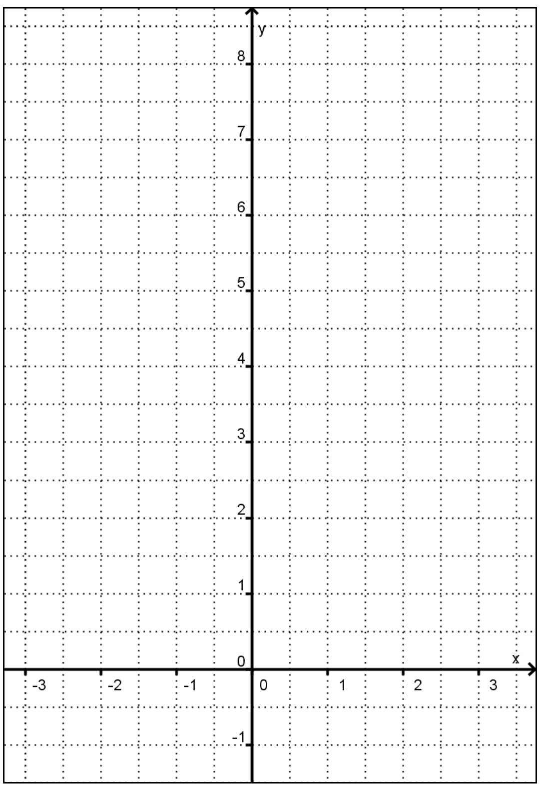
$$\left(a^x\right)^y = a^{x.y}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

Construisons, point par point, les graphiques des fonctions $f_1(x) = 2^x$ et $f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:





Observations	Conséquences
(1) $dom\, f = ...$	....
$Im\, f = ...$	....
(2) f est une bijection	....
(3) • Si $a>1$, la fonction est strictement	....
• Si $0<a<1$, la fonction est strictement	....
(4) Les graphiques comprennent toujours les points .... et	On retrouve 2 propriétés : ....
(5) • Si $a>1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = ...$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = ...$	....
• Si $0<a<1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = ...$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = ...$	....

Le saviez-vous ? La notation des puissances avec indice supérieur, vers 1620, a conduit à utiliser le verbe exposer, du latin *exponere* signifiant « mettre hors de, en vue ». Le mot « exponentiel » apparaît en 1711 et s'appuie sur le sens mathématique d'exposant, puis il se substantive en « une exponentielle ». Il entre peu à peu dans le vocabulaire courant pour qualifier un phénomène à croissance très rapide.

2. Equations et inéquations exponentielles

Une (in)équation exponentielle est une (in)équation où l'inconnue se trouve dans un (ou plusieurs) exposants.

Propriétés :

$$\forall a \in \mathrm{IR}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x, y \in \mathrm{IR} : a^x = a^y \iff x = y$$

$$\forall a > 1, \forall x, y \in \mathrm{IR} : a^x < a^y \iff x < y$$

$$\forall 0 < a < 1, \forall x, y \in \mathrm{IR} : a^x < a^y \iff x > y$$

Exemples :

(1) $2^x = 32$

(2) $3^{2x} = \dfrac{1}{\sqrt{27}}$

(3) $3^{x+5} = 2^{x+5}$

(4) $9^x - \dfrac{4}{3}.3^x + \dfrac{1}{3} = 0$

(5) $6^{2x+1} > \dfrac{1}{216}$

(6) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2} \leq \dfrac{1}{16}$

<u>Exercices :</u>

https://bit.ly/46a5Lkk

1. Résous les équations et inéquations suivantes sans calculatrice :

(1) $8^x = 2$

(2) $10^x = 0{,}000001$

(3) $5^{2x} - 0{,}0016 = 0$

(4) $4^{x+2} - 8^x = 0$

(5) $2^x = -\dfrac{1}{8}$

(6) $2^x = \sqrt[4]{8}$

(7) $\left(3^{x-1}\right)^3 = 9.3^{x-2}$

(8) $3^{6x} = \sqrt[3]{9}$

(9) $4.2^x = 0{,}25$

(10) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x^2-3x} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{2x-2}$

(11) $\left(4^{3-x}\right)^{2-x} = 1$

(12) $3^x.9^{2x+3} = \dfrac{1}{3}.27^{x-1}$

(13) $3^{x^2-4x+5} = 243$

(14) $4^{1-2x} - \left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{x}{2}} = 0$

(15) $\dfrac{2^{2x-6}}{3^{2x-6}} = 1$

(16) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2-5x}.25^{2x-\frac{2}{3}} = 125$

(17) $8^x.2^{15} = 2^{30}.4^x$

(18) $4.2^x.8^x = 64$

(19) $5^{x+2}.25^{-x} = 625$

(20) $2 = 4.3^{2x+9} - 10$

(21) $4^{2x} - 5.4^x + 4 = 0$

(22) $2^{4x+3} + 3.4^x - 2^{-1} = 0$

(23) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

(24) $3^{x^2+9} < 9^{5x}$

(25) $0,2^{1+3x} > 5^{2x+3}$

(26) $0,25^{1-3x} > 4^{2x+3}$

(27) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} < \frac{16}{9}$

(28) $0,5^{x} + 1 < 2$

(29) $3^{2x-1} - \frac{1}{3} > 0$

(30) $\left(\frac{1}{6}\right)^{4x+8} \leq 36$

(31) $4^{2x^2+2x-3} \geq 4$

(32) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \geq 16$

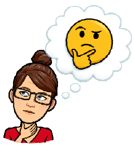
(33) $2^{-3x^2+15x} < 2^{12}$

(34) $9^{x^2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} < 0$

(35) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-x} \geq 1$

(36) $3^{\frac{5}{x}} > 27$

2. *GOOGLE FORM* : « Equations et inéquations exponentielles »
https://forms.gle/3oMPXfzQ4PYd2unJ8



Pour chercher :

1. Résous l'équation $\dfrac{2^{x+1} + 4^{2x-2}}{2^{x+3}} = \dfrac{1}{2}$.

Sol : $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

2. Résous l'équation $125^{x} - 31.\left(5^{x} - 1\right).5^{x-1} = 1$.

4. L'exponentielle népérienne

(1) Un placement idéal…

En 1685, le mathématicien suisse Jacques Bernoulli étudie le problème des intérêts composés. Cette question, a priori sans rapport avec les exponentielles, va pourtant révéler l'existence d'un nombre qui jouera un rôle très particulier dans l'étude des fonctions exponentielles et des fonctions logarithmiques.

On place un capital de 1000 € pendant 1 an. Quand on le retire, il est de 2000 €. Le taux sur 1 an est donc de 100 %. Que se passerait-il si on capitalisait les intérêts chaque semestre, chaque mois, chaque semaine, chaque jour, chaque heure, chaque minute et chaque seconde ?

Complète le tableau pour un capital initial de 1 €.

Capitalisation	Capital obtenu
Annuelle	2
semestrielle	
mensuelle	
hebdomadaire	
journalière	
toutes les heures	
toutes les minutes	
toutes les secondes	

<u>Conclusion :</u>

(2) Approche de *e* par la dérivée de la fonction exponentielle

Rappelons que $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Appliquons cette définition à la fonction exponentielle de base *a* :

$(a^x)' =$

$=$

$=$

$=$

La calculatrice ou l'ordinateur permettent de constater que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$ existe et est finie. Examinons-la.

$a=0,5$	
h	$\dfrac{0,5^h-1}{h}$
0,1	-0,6697
0,01	-0,6908
0,001	-0,6929
0,0001	-0,6931
0,00001	-0,6931
0,000001	-0,6931

$a=1,5$	
h	$\dfrac{1,5^h-1}{h}$
0,1	0,4138
0,01	0,4063
0,001	0,4055
0,0001	0,4055
0,00001	0,4055
0,000001	0,4055

$a=2$	
h	$\dfrac{2^h-1}{h}$
0,1	0,7177
0,01	0,6956
0,001	0,6934
0,0001	0,6932
0,00001	0,6931
0,000001	0,6931

$a=2,5$	
h	$\dfrac{2,5^h-1}{h}$
0,1	0,9596
0,01	0,9205
0,001	0,9167
0,0001	0,9163
0,00001	0,9163
0,000001	0,9163

$a=3$	
h	$\dfrac{3^h-1}{h}$
0,1	1,1612
0,01	1,1047
0,001	1,0992
0,0001	1,0987
0,00001	1,0986
0,000001	1,0986

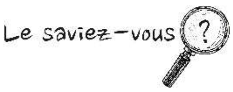
Ces résultats laissent supposer qu'il existe un réel a (compris entre 2,5 et 3) tel que la limite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$ soit égale à 1.

Pour ce réel et pour h très petit on a donc :

On peut dès lors écrire :

On retrouve la limite découverte avec le placement idéal.

e est un nombre irrationnel, c'est-à-dire décimal illimité non périodique.



L'irrationnalité de e a été démontrée par Euler en 1737, puis étendue à e^n en 1761 grâce à Jean-Henri Lambert (1728-1777, ci-contre), qui démontra aussi celle de π .

(3) La dérivée

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \left(e^x\right)' = e^x}$$

En effet, on vient de montrer que $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(a^x\right)' = a^x . \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$.

Et on a choisi e tel que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.

Donc, $\left(e^x\right)' = e^x . \underbrace{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x$

De plus, le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'écrire :

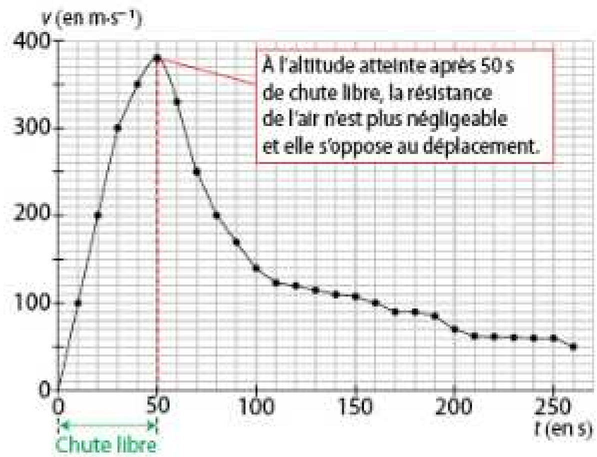
$$\boxed{\forall x \in dom\, f : \left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} . f'(x)}$$

<u>Exemple :</u> $\left(e^{3x^2}\right)' = \ldots$

Le saviez-vous ?

Le 14 octobre 2012, l'Autrichien Felix Baumgartner a, le premier, franchi le mur du son en chute libre. Il a sauté d'une capsule à une altitude d'environ 39,4 km et n'a déclenché son parachute qu'au bout de 259 secondes, à 2,5 km d'altitude.

La courbe ci-dessous représente la vitesse $v(t)$ de Felix en fonction du temps t écoulé depuis le début de chute jusqu'à l'ouverture de son parachute. On observe clairement deux phases. Pour la deuxième, en admettant que la force de frottement est proportionnelle à la vitesse, on montre que la vitesse vérifie une relation du type : pour tout t positif, $v'(t) + 0{,}5v(t) = 9{,}8$.



Peut-on déterminer l'expression d'une telle fonction ?

(4) Exercices

https://bit.ly/44Pqf0n

1. Calcule les limites suivantes ; en ne laissant pas d'exposant fractionnaire ni négatif :

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{n}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{n}\right)^{n}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n}\right)^{2n}$

$(a^x)' = \ln a . a^x$

$(a^f)' = \ln a . a^f . f'$

2. Dérive les fonctions qui suivent, en simplifiant si possible :

(1) $f(x) = 2^{2x}$

(2) $f(x) = 3.5^{4x^2+1}$

(3) $f(x) = e^{x^2}$

(4) $f(x) = x.e^x$

(5) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

(6) $f(x) = x^3.e^x$

(7) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

(8) $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$

(9) $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$

(10) $f(x) = \arctan e^x$

3. Résous :

(1) $(e^x)^2 - e = 0$

(2) $e^{x^2} - e = 0$

(3) $2e^{-x} = \dfrac{4}{e^x+1}$

(4) $e^{5-x^2} = e$

(5) $e^{3x+1} = \dfrac{1}{e^2}$

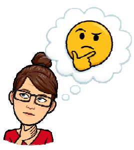
(6) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

(7) $e^{2x-1}-\frac{1}{e}>0$

(9) $x.\left(e^{x}-1\right)\geq 0$

(8) $\frac{1}{e^{x}}-e>0$

4. *GOOGLE FORM* : « Dérivée des fonctions exponentielles »
   https://forms.gle/3mUKg89LpQvddmJF6



Pour chercher :

1. Détermine la réciproque de la fonction $f\left(x\right)=\frac{2e^{x}+1}{e^{x}+1}$.

   Sol : $f^{-1}\left(x\right)=\ln\frac{1-x}{x-2}$

2. Vrai ou faux ?

   On considère la fonction $f_n\left(x\right)=x.e^{-nx+1}$ définie sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$.

   Pour tout entier naturel $n\geq 1$, f_n admet un maximum.

   Sol : Vrai car la dérivée de la fonction $f_n'\left(x\right)=e^{-nx+1}.\left(1-nx\right)$ possède une racine et avec le tableau de signe, on déduit que cette racine est un maximum de la fonction.

3. Vrai ou faux ?

   La courbe représentative de la fonction $f\left(x\right)=e^{-x}.\cos x$ admet une asymptote en $+\infty$.

5. Théorème de l'Hospital

Dans le calcul des limites, on rencontre des cas d'indétermination comme $\infty - \infty$, $0.\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, …

La plupart du temps, on peut lever ces indéterminations soit en factorisant, soit en multipliant par des expressions conjuguées.

Lorsque l'indétermination est du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, on peut appliquer, dans la plupart des cas, le **théorème de l'Hospital** :

> Si f et g sont deux fonctions continues et dérivables en a telles que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$,
>
> alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exercices :

https://bit.ly/44UhlyK

1. Calcule les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x}$

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{2x}$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2.e^x$

(4) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{5^x + 3^x}{x}$

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(6) $\lim\limits_{x \to -\infty} x.e^{-x^2}$

(7) $\lim\limits_{x \to +\infty} x.2^{-x}$

(8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5^{-x}+1}{x}$

(9) $\lim\limits_{x \to +\infty} x.e^{-x}$

(10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$

(11) $\lim\limits_{x \to +\infty} x.e^{\frac{1}{x}}$

(12) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x^4}$

(13) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x}-x-1}{2e^{x}-2}$

(14) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x}.x$

(15) $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

(16) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}.x}$

2. *Google Form* : « Limites exponentielles » :
https://forms.gle/jNsz2FVHyqEx4gUXA

B. Fonctions logarithmiques

1. Pour découvrir

Résous : $\left(2^x\right)^2 - 4.2^x + 3 = 0$.

2. Définitions des fonctions logarithmiques

Comme les fonctions exponentielles sont bijectives, leurs réciproques sont aussi des fonctions : on les appelle **fonctions logarithmiques de base a** et on les note $\log_a x$.

Définition : La fonction logarithmique de base a est telle que $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$.

Autrement dit, le logarithme en base *a* de *x* est l'exposant qu'il faut donner à la puissance de a pour obtenir x.

Exemples : $\log_2 32 = \ldots$ car ....

$\log_2 \frac{1}{2} = \ldots$ car ....

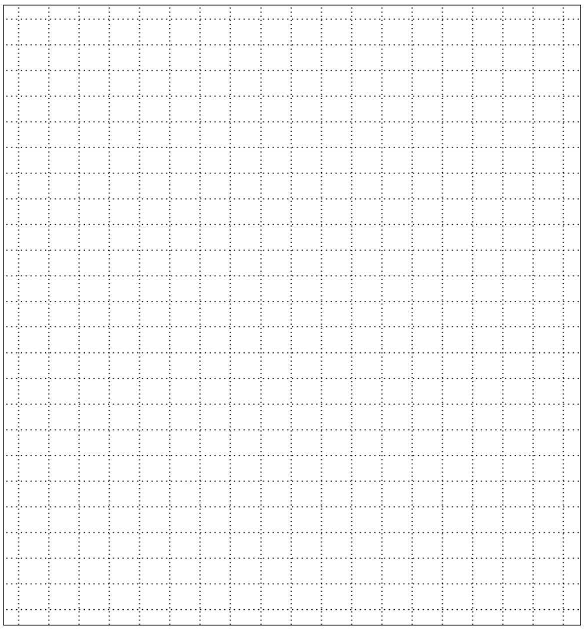
Cas particuliers :

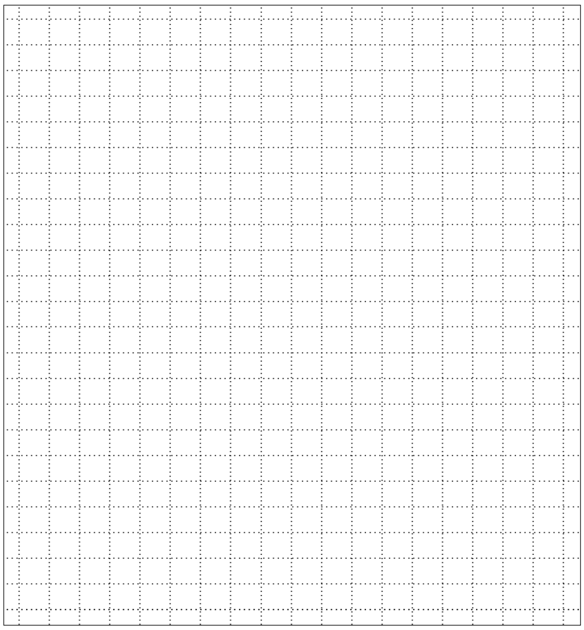
- Des logarithmes très utilisés sont les logarithmes de base 10. Dans ce cas, on omettra d'écrire la base : $\log_{10} x$ s'écrit $\log x$.
- Le logarithme de base e est appelé **logarithme népérien**. Au lieu d'écrire $\log_e x$, on écrit $\ln x$.

3. Propriétés déduites des graphiques

Dans un système d'axes orthonormés, les graphiques de la fonction exponentielle et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Construisons les graphiques des fonctions $f_1(x) = 2^x$ et de sa réciproque $f_2(x) = \log_2 x$ dans un repère et les graphiques des fonctions $f_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ et de sa réciproque $f_4(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ dans un second repère.





Observations	**Conséquences**
(1) $dom\, f^{-1} = \ldots$ $Im\, f^{-1} = \ldots$	....

(2) f^{-1} est une bijection	....
(3) • Si $a>1$, la fonction est strictement	....
• Si $0<a<1$, la fonction est strictement	....
(4) Les graphiques comprennent toujours les points .... et	On retrouve 2 propriétés : ....
(5) • Si $a>1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = \ldots$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = \ldots$	....
• Si $0<a<1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = \ldots$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = \ldots$	....

4. Propriétés algébriques

(1) $\forall a \in \mathrm{IR}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x \in \mathrm{IR} \ : \ x = \log_a a^x$

(2) $\forall a \in \mathrm{IR}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x \in \mathrm{IR}_0^+ \ : \ a^{\log_a x} = x$

(3) Logarithme d'un produit : $\forall a \in \mathrm{IR}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x, y \in \mathrm{IR}_0^+ \ : \ \log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$

Démonstration :

(4) Logarithme d'une puissance : $\forall a \in \mathrm{IR}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x \in \mathrm{IR}_0^+, \forall n \in \mathrm{IR}$: $\log_a x^n = n.\log_a x$

Démonstration :

(5) Logarithme d'un quotient : $\forall a \in \mathrm{IR}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x, y \in \mathrm{IR}_0^+$: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

Démonstration :

5. Changements de base

Pour calculer $\log_2 8$, on exprime 8 sous la forme d'une puissance de 2 : $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$.
Mais pour calculer $\log_2 6$, on ne sait pas exprimer 6 sous la forme d'une puissance de 2. On va donc passer de ce logarithme aux logarithmes de n'importe quelle base.

$\forall a, b \in \mathrm{IR}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x \in \mathrm{IR}_0^+, \forall y \in \mathrm{IR}$:

Ainsi :

En particulier :

Exemple : $\log_2 6 = \ldots$

Exercice : Calcule sans utiliser de calculatrice :

(1) $\log_4 64$

(2) $\log_5 \dfrac{1}{\sqrt{5^3}}$

(3) $\log_{0,5} 2^5$

(4) $\log 0,001$

(5) $\ln 1 + \ln e$

(6) $\ln \dfrac{1}{e^3}$

(7) $\ln e^2 - \ln e^{-2}$

(8) $e^{\ln 3}$

(9) $10^{2\log 5}$

(10) $\log_9 3^8$

6. Equations et inéquations logarithmiques

Une (in)équation logarithmique est une (in)équation dans laquelle l'inconnue se trouve dans l'argument d'un ou de plusieurs logarithmes.

Propriétés :

$$\forall a \in \mathrm{IR}_0^+ \setminus \{1\}, \forall x, y \in \mathrm{IR}_0^+ : \ \log_a x = \log_a y \ \Leftrightarrow \ x = y$$

$$\forall a > 1, \forall x, y \in \mathrm{IR}_0^+ : \log_a x < \log_a y \ \Leftrightarrow \ x < y$$

$$\forall 0 < a < 1, \forall x, y \in \mathrm{IR}_0^+ : \log_a x < \log_a y \ \Leftrightarrow \ x > y$$

Exemples :

(1) $\ln(x-7)=\ln(2x+1)+\ln 2$

(2) $\ln^2 x-2.\ln x-8=0$

(3) $\log_2(x-1)-\log_2 3=4$

(4) $2\log(x-1)=0$

(5) $\log_3 x=\log_9(x+2)$

(6) $\log_3 x<2$

Exercices :

https://bit.ly/48aSwl4

1. Résous les équations suivantes sans calculatrice (N'oublie pas les conditions d'existence !)

(1) $4.\ln x = 16$

(2) $\ln(x-2) = -2$

(3) $2.\log(x-2) = \log(3x-8)$

(4) $2.\ln(x+2) = \ln(5x+6)$

(5) $2.\ln(x+1) - \ln x = \ln 2$

(6) $\log_3(x+2) + 1 = \log_3 x + \log_3(x+4)$

(7) $\ln(2x-3) + \ln(x-4) = 2\ln 5$

(8) $\ln(2x-3) - \ln(x-4) = 2\ln 5$

(9) $3\log x = 2\log\left(2\sqrt{2}\right)$

(10) $2\ln\left(\frac{x}{3}\right) = \ln 81 - 4\ln 3$

(11) $\log(-x+1) = 2.\log(x-3)$

(12) $\ln\left(x^2-3\right) = 2\ln(x-1)$

(13) $4\ln^2 x + 10\ln x - 6 = 0$

(14) $\ln^2 x - 2\ln x - 3 = 0$

(15) $\log 7 = \log\left(x^3-1\right) - \log(x-1)$

(16) $2\log(2x-1) - \log\left(3x-2x^2\right) = \log(4x-3) - \log x$

(17) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

(18) $\frac{1}{2}\log(2x) = \log(3-x) - \log\sqrt{x+1}$

(19) $2\log_4(x+1) + \log_4(x+3) = \log_4(6x+2) + \frac{1}{2}$

(20) $\log_x(5x-4) + \log_{5x-4} x^2 = 3$

2. Résous les inéquations suivantes sans calculatrice (N'oublie pas les conditions d'existence !) :

(1) $\log x \geq 0$

(2) $\ln x \leq 0$

(3) $\log_2(x+1) \leq 1$

(4) $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right) \leq 0$

(5) $1+\log x < 0$

(6) $\ln(e^x-2) \geq \ln(4-e^x)$

(7) $\ln(x^2+1)+\ln x \geq \ln 2$

(8) $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) \leq 2.\log_{\frac{1}{2}} x$

(9) $\log(x-2)-\log(x+3) > \log(x+1)$

(10) $\ln(x+3)+\ln(x-1) > \ln(2x+3)$

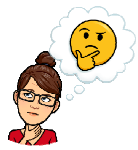
(11) $\ln(-2x+3) < 2\ln x$

(12) $\log_2(x^2-x) > 3$

(13) $(e^x-2)(4-e^x) \leq 0$

(14) $\log_2(x+1)+\log_4 x < 1$

__Pour chercher :__



1. Résous l'équation $\log_2\left(2^{x+1}-15\right)+x=3$. (*Examen d'admission, ERM, 2005*)

   $Sol:\ S=\{3\}$

2. Résous l'inéquation $\log_2(x+1)+\log_4 x<1$. (*Examen d'admission, ERM, 2004*)

   $Sol:\ S=]0;1[$

3. Résous le système $\begin{cases} x.y=125 \\ 2.(\log_y x+\log_x y)=5 \end{cases}$.

4. Trouve toutes les valeurs réelles de a telles que $\log_a 2=\log_2 a^4$. (*Examen d'admission, EPL, 2018*)

5. Résous l'équation $\log(\sin x)+\log(\cos x)=\log\dfrac{1}{2}$.

   $Sol:\ S=\left\{\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right\}$

8. Dérivée des fonctions logarithmiques

(1) Dérivée de la fonction $f(x) = \ln x$

Donc, $\forall x \in \mathrm{IR}_0^+$: $\boxed{}$ et $\boxed{}$

<u>Exemple :</u> $\left[\ln\left(x^3+1\right)\right]' =$

(2) Dérivée des fonctions logarithmiques de base *a*

Donc, $\forall x \in \mathrm{IR}_0^+, \forall a \in \mathrm{IR}_0^+ \setminus \{1\}$: $\boxed{}$ et $\boxed{}$

<u>Exemple :</u> $\left[\log_2\left(x^2+1\right)\right]' =$

(3) Exercices

https://bit.ly/3renFDG

1. Dérive les fonctions suivantes :

(1) $f(x)=\ln(2x)$

(2) $f(x)=\ln^2 x$

(3) $f(x)=\ln x^2$

(4) $f(x)=\arctan(\ln x)$

(5) $f(x)=\ln\sqrt{x}$

(6) $f(x)=x.\ln x-x$

(7) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

(8) $f(x)=\log_3(x^2+1)$

(9) $f(x)=\log x$

(10) $f(x)=\ln\sqrt{x^2+1}$

(11) $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$

(12) $f(x)=\ln(\sin x)$

(13) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

(14) $f(x)=x^2.\ln(x+1)$

(15) $f(x)=\log_3(2x+7)$

Le saviez-vous ?

Jacques Hadamard et Jean de la Vallée Poussin sont à l'origine du théorème de raréfaction des nombres premiers.
Soit n un entier naturel.
Le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n est approximativement $\dfrac{n}{\ln n}$.
Autrement dit, plus un nombre est grand, plus la probabilité qu'il soit premier est faible.

2. Calcule les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x.\ln x)$

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(1+x^2\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log x}{x-1}$

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

(5) $\lim\limits_{x\to -\infty}\ln(1-x)$

(6) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(1-x)$

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$

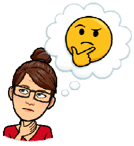
(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$

(9) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

(10) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln(x+3)-\ln(x+1)\right)$

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}}{\ln(1+x)-\ln(1-x)}$

(12) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{\ln\left(x^2+8\right)}$



Pour chercher :

1. Détermine l'expression analytique de la réciproque $g(x)$ de la fonction $f(x) = \ln\left(2 + e^{x-3}\right)$ et calcule le nombre $g'(\ln 3)$.

   Sol : 3

2. Déterminez *a* pour que les courbes $y = \ln x$ et $y = a\sqrt{x}$ soient tangentes. (*ERM, Juillet 2000*)

   Sol : $a = \dfrac{2}{e}$

C. Applications

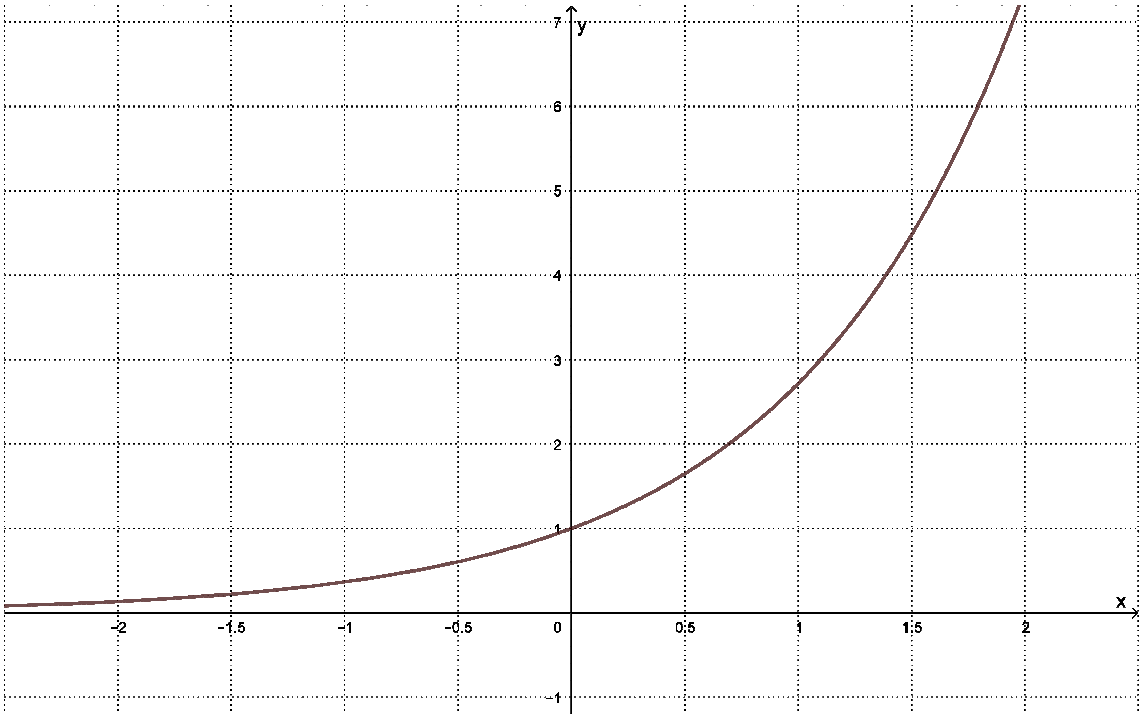
https://bit.ly/3sTKsFh

1. Entre les poteaux distants d'une portée p, le fil se courbe en forme de chaînette sous l'effet de sa propre masse (effet de la pesanteur). C'est la forme prise par les câbles des lignes à haute tension.

   L'équation de la courbe en forme de chaînette est de la famille $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

   Construis le graphique de cette fonction au départ de la fonction exponentielle.



2. Le nombre de bactéries $N(t)$ que renferme une culture au temps t (exprimé en jours) est donné par $N(t) = N_0.e^{\beta t}$ où N_0 est le nombre initial de bactéries et β un coefficient dépendant du type de bactéries et du milieu ambiant.

   On a estimé le nombre de bactéries d'une culture à 200 000 après 3 jours et à 1 600 000 après 4,5 jours.

   (1) Quel est le nombre de bactéries après 5 jours ?

   (2) Quand la culture contient-elle 800 000 bactéries ?

3. Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000°C. A la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.

On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius (°C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70°C ; sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

On note t le temps (en h) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.

La température du four (en °C) à l'instant t est donnée par la fonction $f(t) = a.e^{-\frac{t}{5}} + b$ définie $\forall t \geq 0$ et où a et b sont deux nombres réels.

On admet que f vérifie la relation suivante : $f'(t) + \frac{1}{5} f(t) = 4$.

(1) Détermine les valeurs de a et b sachant qu'initialement la température du four était de 1 000°C.

(2) Au bout de combien d'heures peut-on ouvrir la porte du four en toute sécurité ?

4. Si l'on prend par voie orale une tablette de 100 mg d'un médicament contre l'asthme et si aucune trace du médicament n'est présente lors de la prise, la quantité totale $A(t)$ du médicament présente dans le sang après t minutes est donnée par $A(t) = 100(1 - 0,9^t)$ pour $0 \leq t \leq 10$.

Quel est le temps nécessaire pour que 50 mg du médicament pénètrent dans le sang ?

5. Les membres d'une organisation humanitaire circulent dans le désert. En mesurant la pression des pneus de leur véhicule tout terrain, ils s'aperçoivent que l'un des pneus a une fuite. Malheureusement, la roue de secours est inutilisable. Ils partent aussitôt vers le village le plus proche situé à une heure trente de route.

On admet que l'expression $f(t) = 1 + e^{1-t}$ donne la pression du pneu percé, exprimée en kg/cm², à l'instant t exprimé en heures. L'origine du temps est le moment où le véhicule se met en route.

(1) Quelle est la pression du pneu percé au moment où l'équipe se met en route ?

(2) Quelle sera la pression de ce pneu 45 minutes plus tard ?

(3) Pour rejoindre le village, le véhicule doit emprunter une piste caillouteuse sur laquelle la pression du pneu percé ne doit pas être inférieure à 1,5 kg/cm². L'équipe pourra-t-elle rejoindre ce village en voiture ? Si non, combien de temps le véhicule pourra-t-il rouler jusqu'à ce que la pression du pneu soit égale à 1,5 kg/cm².

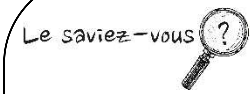
6. Si le système de réfrigération d'un camion transportant des laitues tombe brusquement en panne, la température des laitues tend vers la température de 22°C de l'air ambiant extérieur. La fonction T définie par $T(t) = 22 - a.e^{bt}$ dans laquelle a et b sont des constantes, représente la température en degrés Celsius des laitues au bout de t heures.

(1) Suppose que la température initiale des laitues était de 4°C et qu'elle est de 10°C après 1 heure. Calcule les constantes a et b.

(2) Si la panne dure 3 heures, détermine la température des laitues.

(3) Les laitues commencent à se gâter à 18°C. Calcule le temps dont dispose le conducteur du camion pour réparer le système de réfrigération avant que les laitues ne commencent à s'avarier.

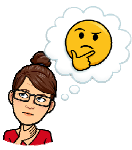
7. La fonction $C(t)=110.\left(\dfrac{\ln t-2}{t}\right)$ où $t\geq 10$ représente la capacité pulmonaire d'une personne en fonction de son âge t, exprimé en années. Calcule l'âge auquel la capacité pulmonaire d'une personne est maximale.



En 1909, le chimiste danois, Soren Peter Sorensen (1868-1938) préconisa l'emploi du pH pour évaluer l'acidité ou l'alcalinité d'un milieu.
Il proposa d'exprimer le pH par l'opposé du logarithme décimal de la concentration des ions hydrogène d'une solution : $pH=-\log\left[H^+\right]$.

La concentration des ions hydrogène dans l'eau pure étant égale à 10^{-7} mole par litre, on a $pH_{eau}=-\log 10^{-7}=7$.

__Pour chercher :__



1. La fonction $f(x)=\dfrac{mg}{k}\left(x+\dfrac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}x}-\dfrac{m}{k}\right)$ permet de modéliser la distance parcourue (en mètre) par un solide lâché en chute libre, en fonction du temps (en seconde).

   Dans cette fonction,

   - $g=9{,}8$ m/s
   - m est la masse de l'objet (en kg)
   - k est un coefficient (en kg/s) strictement positif, lié aux frottements de l'air et à la forme du solide.

   (1) Quelle distance un parachutiste de 75 kg aura-t-il parcourue au bout de 10 secondes ($k=15\,\text{kg/s}$) ?

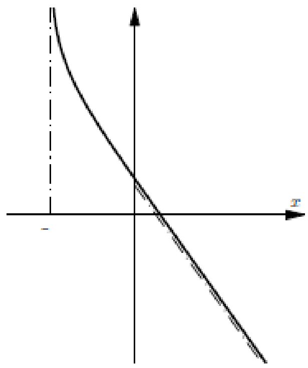
   (2) Quelle est sa vitesse à cet instant ?

   (3) La vitesse du parachutiste est-elle strictement croissante ?

   (4) Quelle est la plus petite vitesse que le parachutiste ne peut ni atteindre ni dépasser ?

2. Soit la fonction $f(x)=\ln\dfrac{e}{e^{bx}-c}$ où b et c sont des paramètres réels strictement positifs.

   (1) Détermine les valeurs de b et c pour que $f(x)$ soit définie sur $]-2;+\infty[$ et admette les asymptotes $x=-2$ et $y=-2x+1$ (en $+\infty$), c'est-à-dire pour que *f* admette la représentation suivante :



   (2) Calcule l'abscisse *x* en laquelle le graphe de $f(x)$ admet une tangente de pente égale à -4.

(*Examen d'admission, ULg, 2002*)

D. Exercices variés

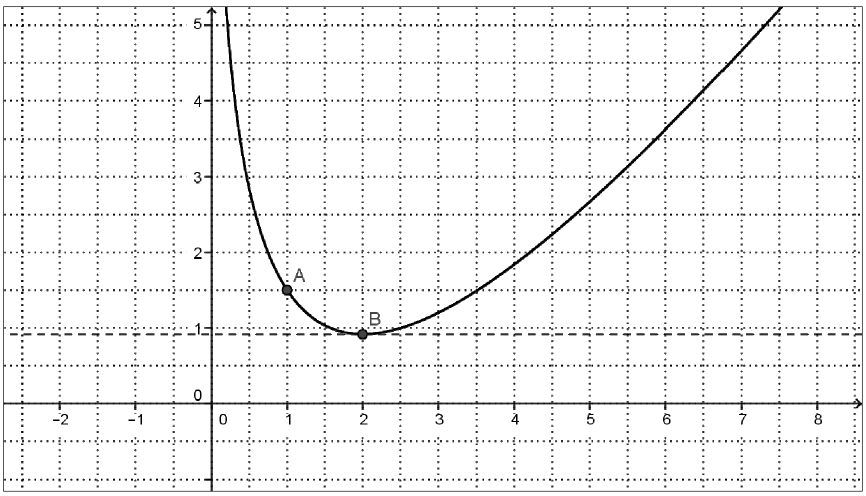
1. Résous $\left(3^x-5\right)^2=3^{2x-1}-11$.

2. Etudie la fonction $f\left(x\right)=e^{-x^2}$ (domaine, intersection avec les axes, asymptotes, dérivée première et croissance, dérivée seconde et concavité, tableau récapitulatif, graphique).

3. Etudie la fonction $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x+1}{x}$.

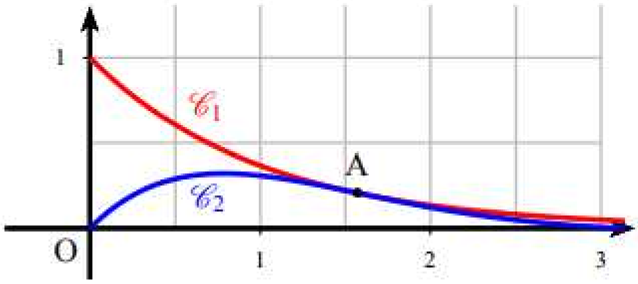
4. Détermine la plus courte distance du point $A\left(1;0\right)$ à la courbe de la fonction $f\left(x\right)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

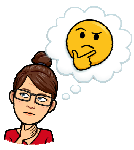
5. On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f\left(x\right)=ax+b\ln x$ où *a* et *b* sont des réels. On donne ci-dessous la courbe représentative de *f*. Le point $A\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ appartient à G_f et la tangente à G_f au point B d'abscisse 2 est horizontale. Calcule les réels a et b.



6. Dans le repère ci-dessous, on a tracé les courbes C_1 et C_2 représentant les fonctions f_1 et f_2 définies sur $[0;\pi]$ par $f_1(x)=e^{-x}$ et $f_2(x)=\sin x.e^{-x}$.

   Détermine les coordonnées du point *A* pour lequel les courbes C_1 et C_2 sont tangentes en ce point.





<u>*Pour chercher :*</u>

1. Détermine les conditions d'existence de l'inéquation suivante : $\dfrac{x-\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}}{\ln\sqrt{5-x^2}}<e^x$.

(*Examen d'admission, EPL, Juillet 2018*)

2. Détermine les intervalles de croissance de la fonction $f(x)=x^2.\ln x$.

3. Calcule la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{xt}-1-xt}{x^2}$, pour une constante réelle t.