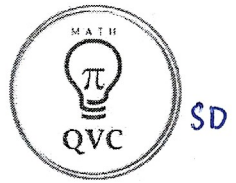


FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

Fonctions exponentielles

C. SCOLAS



1. Résous les (in)équations suivantes :

$$(1) \frac{1}{3} \cdot 9^{2x} = 27^{x^2}$$

$$3^{-1} \cdot (3^2)^{2x} = (3^3)^{x^2}$$

$$3^{-1} \cdot 3^{4x} = 3^{3x^2}$$

$$3^{-1+4x} = 3^{3x^2}$$

$$-1+4x = 3x^2$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{6} \left\langle \frac{1}{3} \right.$$

$$S = \left\{ 1; \frac{1}{3} \right\}$$

$$(2) 5^{x-1} (25^{2x+2}) = 125^x$$

$$5^{x-1} \cdot (5^2)^{2x+2} = (5^3)^x$$

$$5^{x-1} \cdot 5^{4x+4} = 5^{3x}$$

$$5^{5x+3} = 5^{3x}$$

$$5x+3 = 3x$$

$$2x = -3$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

$$(3) 3^{-2x+1} \cdot 3^{-2x-3} = 3^{-x}$$

$$3^{-4x-2} = 3^{-x}$$

$$-4x-2 = -x$$

$$-3x = 2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

$$(4) 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$$

On pose $y = 2^x$ et on a :

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$$

$$y = \frac{2 \pm 6}{2} \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2^x = 4$$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2$$

ou $2^x = -2$
impossible

$$S = \{2\}$$

$$(5) \frac{(e^x)^{x+5}}{e^7} - \frac{1}{e} = 0$$

$$e^{x^2+5x-7} = e^{-1}$$

$$x^2 + 5x - 7 = -1$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 49$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{2} \begin{cases} 1 \\ -6 \end{cases}$$

$$S = \{1, -6\}$$

$$(6) e^x + e^{-x} - 3 = 0$$

$$(e^x)^2 + 1 - 3e^x = 0$$

On pose $y = e^x$ et on a :

$$y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5$$

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} 2,618 \\ 0,38 \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^x = 2,618$$

$$x = 0,96$$

$$\text{ou } e^x = 0,38$$

$$x = -0,96$$

... par tâtonnements...

$$S = \{\pm 0,96\}$$

$$(7) \left(\frac{1}{2}\right)^{4x+5} < \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+5} < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$4x+5 > 2$$

$$4x > -3$$

$$x > -\frac{3}{4}$$

$$S =]-\frac{3}{4}; \rightarrow$$

$$(8) \left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-4} \leq \frac{20}{45}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-4} \leq \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-4} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$$

$$2x^2-4 \leq -2$$

$$2x^2-2 \leq 0$$

$$\text{Racines: } 2x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

$$\text{TS: } \begin{array}{c|ccc} x & -1 & & 1 \\ \hline 2x^2-2 & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$S = [-1; 1]$$

$$(9) 16^{4x-3} (4^{x+1}) - 1 > 0$$

$$\left(\frac{2}{4}\right)^{4x-3} \cdot 4^{x+1} > 1$$

$$4^{8x-6} \cdot 4^{x+1} > 4^0$$

$$4^{8x-6+x+1} > 4^0$$

$$4^{9x-5} > 4^0$$

$$9x-5 > 0$$

$$x > \frac{5}{9}$$

$$S =]\frac{5}{9}; \rightarrow$$

$$(10) e^{\frac{2x-1}{3x+1}} > \frac{1}{e^2}$$

$$e^{\frac{2x-1}{3x+1}} > e^{-2}$$

$$\frac{2x-1}{3x+1} > -2$$

$$\frac{2x-1}{3x+1} + 2 > 0$$

$$\frac{2x-1}{3x+1} + \frac{2 \cdot (3x+1)}{3x+1} > 0$$

$$\frac{8x+1}{3x+1} > 0$$

$$\text{Racines: } \textcircled{N} x = -\frac{1}{8}$$

$$\textcircled{D} x = -\frac{1}{3}$$

$$\text{TS: } \begin{array}{c|ccc} x & -\frac{1}{3} & & -\frac{1}{8} \\ \hline 8x+1 & - & - & 0 & + \\ 3x+1 & - & 0 & + & + \\ \hline \frac{8x+1}{3x+1} & + & \cancel{1} & - & 0 & + \end{array}$$

$$S = \leftarrow -\frac{1}{3} [0] - \frac{1}{8} \rightarrow$$

2. Calcule :

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{6n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^6 = e^6$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{4n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{4n} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-1}}_{=1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3} \cdot 4} = e^{12}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2}}_{=1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{2 \cdot 2n} \right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

3. Détermine la dérivée de chaque fonction, en ne laissant pas d'exposant fractionnaire, ni négatif :

$$(1) f(x) = \frac{2x^2 - 4}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{4x \cdot e^x - (2x^2 - 4) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x (4x - 2x^2 + 4)}{(e^x)^2} = \frac{-2x^2 + 4x + 4}{e^x}$$

$$(2) f(x) = e^{3\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = e^{3\sqrt{x}} \cdot \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$(3) f(x) = e^x (3x-1)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \cdot (3x-1) + e^x \cdot 3 \\ &= e^x \cdot (3x-1+3) \\ &= e^x \cdot (3x+2) \end{aligned}$$

4. Détermine une équation réduite de la tangente (sous la forme $y = mx + p$) au graphe de la fonction $f(x) = e^{2x-4}$ au point d'abscisse 2.

$$\begin{aligned} f(2) &= e^0 = 1 \\ f'(x) &= 2 \cdot e^{2x-4} \\ f'(2) &= 2 \cdot e^0 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow T \equiv y &= 2 \cdot (x-2) + 1 \\ y &= 2x - 3 \end{aligned}$$

5. Calcule les limites suivantes et donne-en une interprétation graphique :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \quad \Rightarrow \text{Trou en } (0; 0)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cdot e^x)(x+2)^3}{e^x - 1} = \frac{0}{0} \text{ CI}$$

$$\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + x \cdot e^x) \cdot (x+2)^3 + x \cdot e^x \cdot 3 \cdot (x+2)^2}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} ((1+x)(x+2)^3 + x \cdot 3 \cdot (x+2)^2)$$

$$= 8$$

$\Rightarrow$ Trou en $(0; 8)$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$\Rightarrow$ Au plus les abscisses diminuent, au plus les images diminuent.

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$$

$$\Rightarrow AH_{+\infty} \equiv y = 0$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$\Rightarrow AH_{+\infty} \equiv y = 0$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(e^x - 1)}{x} = \frac{0}{0} \text{ ei}$$

$$\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x}{\sqrt{1 - (e^x - 1)^2}}}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \text{Trou en } (0; 1)$$