FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

Fonctions logarithmiques

C. SCOLAS

https://bit.ly/3YNUCog

SD

1. Calcule, en indiquant les étapes :

   (1) $\ln e^3 - 2.\ln e = 3 - 2 = 1$

   (2) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$

   (3) $\log 5 + \log 2 = \log(5.2) = \log 10 = 1$

   (4) $\log_3 36 - \log_9 16 = \log_3 36 - \dfrac{\log_3 16}{\log_3 9} = \log_3 36 - \frac{1}{2}\log_3 16$

   $= \log_3 36 - \log_3 16^{1/2} = \log_3 36 - \log_3 4$

   $= \log_3 \dfrac{36}{4} = \log_3 9 = 2$

2. Résous les (in)équations suivantes ; n'oublie pas les conditions d'existence :

   (1) $2\ln(x-3) + \ln(x-1) = \ln(2x-2)$

   CE1: $x-3>0$, $x>3$ CE2: $x-1>0$, $x>1$ CE3: $2x-2>0$, $x>1$

   $\ln\left((x-3)^2.(x-1)\right) = \ln(2x-2)$

   $(x-3)^2.(x-1) = 2.(x-1)$

   $(x-3)^2.(x-1) - 2(x-1) = 0$

   $(x-1)\left[(x-3)^2 - 2\right] = 0$

   $x = 1$ $x^2 - 6x + 7 = 0$

   $\Delta = 8$ $x = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$

   $S = \{3+\sqrt{2}\}$

   (2) $\log_2(x-2) + \log_2(x+1) = 2$

   CE1: $x-2>0$, $x>2$ CE2: $x+1>0$, $x>-1$

   $\log_2\left((x-2).(x+1)\right) = \log_2 2^2$

   $(x-2)(x+1) = 4$

   $x^2 + x - 2x - 2 - 4 = 0$

   $x^2 - x - 6 = 0$

   $\Delta = 25$

   $x = \dfrac{1 \pm 5}{2}$: 3 ; -2

   $S = \{3\}$

(3) $3\ln^2(x-1)+4\ln(x-1)-4=0$ **CE** : $x-1>0$

$x>1$

On pose $y=\ln(x-1)$ et on a :

$3y^2+4y-4=0$

$\Delta=64$

$y=\dfrac{-4\pm 8}{6} \left\langle \begin{array}{l} \frac{2}{3} \\ -2 \end{array}\right.$

$\rightarrow \ln(x-1)=\dfrac{2}{3}$ ou $\ln(x-1)=-2$

$x-1=e^{\frac{2}{3}}$; $x-1=e^{-2}$

$x=\sqrt[3]{e^2}+1$; $x=\dfrac{1}{e^2}+1$

$S=\left\{\sqrt[3]{e^2}+1 ; \dfrac{1}{e^2}+1\right\}$

(4) $\log_2(x-1)=\log_4 3$ **CE** : $x-1>0$

$x>1$

$\log_2(x-1)=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 4}$

$\log_2(x-1)=\dfrac{\log_2 3}{2}$

$2\cdot\log_2(x-1)=\log_2 3$

$\log_2(x-1)^2=\log_2 3$

$\rightarrow x^2-2x+1=3$

$x^2-2x-2=0$

$\Delta=12$

$x=\dfrac{2\pm 2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$

$S=\{1+\sqrt{3}\}$

(5) $\dfrac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)}=2$ **CE1** : $16-x^2>0$ ↙ TS

$-4<x<4$

CE2 : $3x-4>0$

$x>4/3$

$\log(16-x^2)=2\cdot\log(3x-4)$

$\log(16-x^2)=\log(3x-4)^2$

$16-x^2=9x^2-24x+16$

$-10x^2+24x=0$

$-2x\cdot(5x-12)=0$

$x=0$; $x=\dfrac{12}{5}$

$S=\left\{0 ; \dfrac{12}{5}\right\}$

(6) $\log_2(x+1)+4\log_4 x<1$ **CE1** : $x+1>0$

$x>-1$

CE2 : $x>0$

$\log_2(x+1)+4\cdot\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}<\log_2 2$

$\log_2(x+1)+2\cdot\log_2 x<\log_2 2$

$\log_2(x+1)+\log_2 x^2<\log_2 2$

$\log_2((x+1)\cdot x^2)<\log_2 2$

$x^3+x^2-2<0$

$(x-1)\cdot(x^2+2x+2)<0$

	1	1	0	-2
1	↓	1	2	2
	1	2	2	0

Racines : $(x-1)\cdot(x^2+2x+2)=0$

$x=1$; $\Delta=-4<0$

TS :

x		1	
$x-1$	$-$	0	$+$
x^2+2x+2	$+$	$+$	$+$
x^3+x^2-2	$-$	0	$+$

$S=\left]0;1\right[$

(7) $\log(1-5x) \leq 2 + \log(2x-3)$

CE1: $1 - 5x > 0$
$x < 1/5$

CE2: $2x - 3 > 0$
$x > 3/2$

Les CE sont incompatibles.

$S = \emptyset$

(8) $\ln x - \ln 2 \leq \ln(1-3x)$

CE1: $x > 0$

CE2: $1 - 3x > 0$
$x < 1/3$

$\ln \frac{x}{2} \leqslant \ln(1-3x)$

$\frac{x}{2} \leqslant 1 - 3x$

$\frac{7x}{2} \leqslant 1$

$x \leqslant \frac{2}{7}$

$S =]0 ; \frac{2}{7}[$

(9) $\log_3\left(\frac{4x+1}{2x+9}\right) \geq 0$

CE: $\frac{4x+1}{2x+9} > 0$

x		$-9/2$		$-1/4$	
$4x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x+9$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{4x+1}{2x+9}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$x < -\frac{9}{2}$ ou $x > -\frac{1}{4}$

$\log_3 \frac{4x+1}{2x+9} \geqslant \log_3 1$

$\frac{4x+1}{2x+9} \geqslant 1$

$\frac{4x+1}{2x+9} - 1 \geqslant 0$

$\frac{4x+1-2x-9}{2x+9} \geqslant 0$

$\frac{2x-8}{2x+9} \geqslant 0$

x		$-9/2$		4	
$2x-8$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x+9$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x-8}{2x+9}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$S = \leftarrow ; -\frac{9}{2}[\cup [4 ; \rightarrow$

3. Détermine la dérivée de chaque fonction, en ne laissant pas d'exposant fractionnaire, ni négatif :

(1) $f(x) = 3\ln x - \dfrac{2}{x}$

$$f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$$

(2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \cos x - \ln x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x + x \cdot \ln x \cdot \sin x}{x \cdot \cos^2 x}$$

(3) $f(x) = (x+1)^3 . \ln(2x)$

$$f'(x) = 3 \cdot (x+1)^2 \cdot \ln(2x) + (x+1)^3 \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x}$$

$$= (x+1)^2 \cdot \left(3 \ln(2x) + \frac{x+1}{x}\right)$$

(4) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+3}{3x+2}\right)$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2 \cdot (3x+2) - (2x+3) \cdot 3}{(3x+2)^{\cancel{2}}}}{\dfrac{2x+3}{\cancel{3x+2}}} = \frac{6x+4-6x-9}{(3x+2)(2x+3)} = \frac{-5}{(3x+2)(2x+3)}$$

4. Exprime l'expression suivante en fonction de $\log a$ et de $\log b$: $\log\left[\left(\dfrac{a}{b^2}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b}}\right]$.

$$\log\left(\frac{a}{b^2}\right)^3 + \log \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$$

$$= 3 \log \frac{a}{b^2} + \frac{1}{3} \log \frac{a^2}{b}$$

$$= 3 \cdot (\log a - \log b^2) + \frac{1}{3} (\log a^2 - \log b)$$

$$= 3 (\log a - 2 \log b) + \frac{1}{3} (2 \log a - \log b)$$

$$= 3 \log a - 6 \log b + \frac{2}{3} \log a - \frac{1}{3} \log b$$

$$= \frac{11}{3} \log a - \frac{19}{3} \log b$$

5. Calcule les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \dfrac{0}{0}$ CI

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x^2}$

$= 1$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ CI

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2\sqrt{x}}$

$\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^1}{x^{1/2}} = x^{1-1/2} = x^{1/2} = \sqrt{x}.$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x.\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right) = +\infty \cdot \ln(1+0) = +\infty \cdot 0$ CI

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \dfrac{0}{0}$ CI

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$

$= 1$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0} - \dfrac{1}{0} = \infty - \infty$ ci

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{\ln(1+x) \cdot x} = \dfrac{0}{0}$ ci

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x} \cdot x + \ln(1+x)} = \dfrac{0}{0}$ ci

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1+x-1}{\cancel{1+x}}}{\frac{x+(1+x)\cdot\ln(1+x)}{\cancel{1+x}}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x+(1+x)\cdot\ln(1+x)} = \dfrac{0}{0}$ ci

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\ln(1+x)+\frac{1+x}{1+x}}$

$= \dfrac{1}{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(e^x+1)}{x} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ ci

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{e^x}{e^x+1}}{1} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ ci

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}$

$= 1$