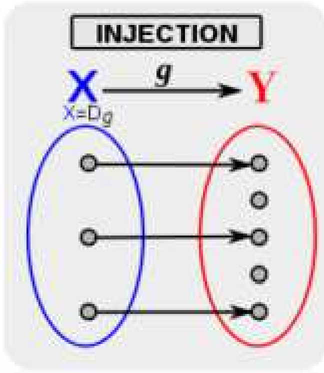
B. Fonctions réciproques

1. Injection, surjection, bijection

Définition : Une fonction est dite **injective** si et seulement si tout réel de l'image correspond au plus à un seul réel du domaine de définition.

En notation mathématique, on a :

$$\forall x_1, x_2 \in dom\, f : f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

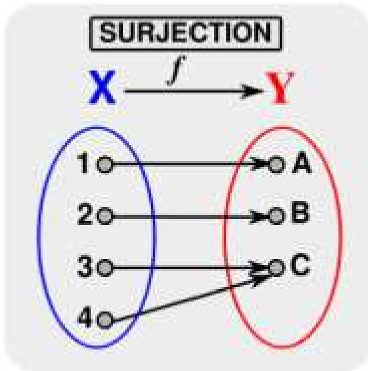


En d'autres termes, deux réels distincts ont toujours des images distinctes.

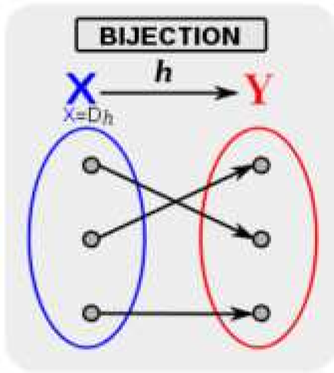
Définition : Une fonction est dite **surjective** si et seulement si tout réel de l'image correspond à au moins un réel du domaine de définition.

En notation mathématique, on a :

$$\forall y \in \operatorname{Im} f \;\; \exists x \in dom\, f \; : \; f\left(x\right) = y$$



Définition : Une fonction est dite **bijective** si et seulement si elle est injective et surjective.

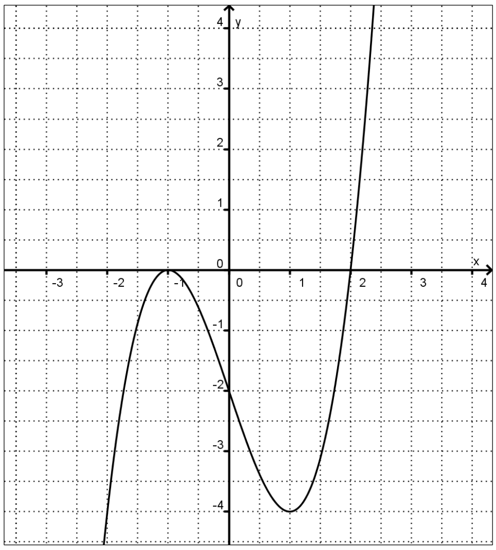


INJECTION, SURJECTION, BIJECTION

https://bit.ly/2WsG3sM

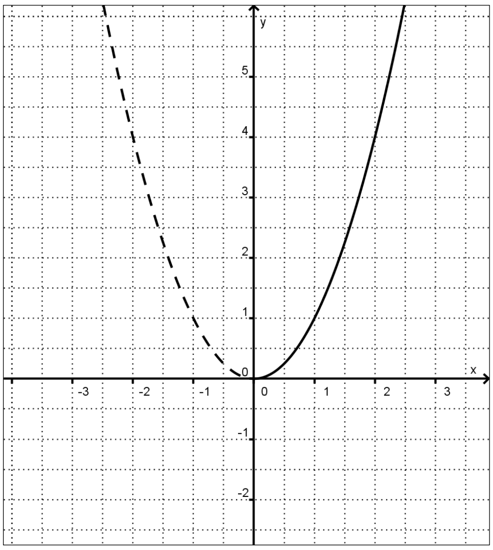
Exemples :

$$f(x)=(x+1)^2(x-2)$$



Ce n'est pas une bijection car pour $y=0$, on a deux valeurs de x $(x=-1$ et $x=2)$.

$$f(x)=x^2$$



$y=x^2$ n'est pas une bijection.

Par contre, si on restreint son domaine de définition à $\mathbb{R}^+$, elle le devient.

2. Relation réciproque

Définition : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On appelle **relation réciproque** de la fonction f la relation de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément x de $\operatorname{Im} f$ fait correspondre le ou les éléments y de $dom\, f$ tels que $f(y) = x$.

Propriété : Si f est injective, alors la relation réciproque de f est une fonction.

En tel cas, on parlera de **fonction réciproque**.

Notation : La fonction réciproque d'une fonction f est notée f^{-1}.

A ne pas confondre avec l'inverse de f.

Propriétés :

(1) Sur un intervalle bien choisi (pour que les fonctions soient définies) : $f^{-1}(f(x)) = x$ et $f(f^{-1}(x)) = x$.

(2) La fonction réciproque de la fonction réciproque est la fonction : $(f^{-1})^{-1} = f$.

Réciproque d'une fonction

https://bit.ly/3zlufXQ

3. Expression analytique de la réciproque d'une fonction

Dans les cas simples, pour trouver l'expression analytique de la fonction réciproque, il suffit de permuter *x* et *y*, puis d'exprimer *y* en fonction de *x*.

Exemple : Soit $f(x)=2x+3$. Recherchons l'expression analytique de f^{-1} :

$y=2x+3$	on part de l'expression de f
$x=2y+3$	on permute *x* et *y*
$y=\dfrac{x-3}{2}$	on isole *y*

Donc $f^{-1}(x)=\dfrac{x-3}{2}$.

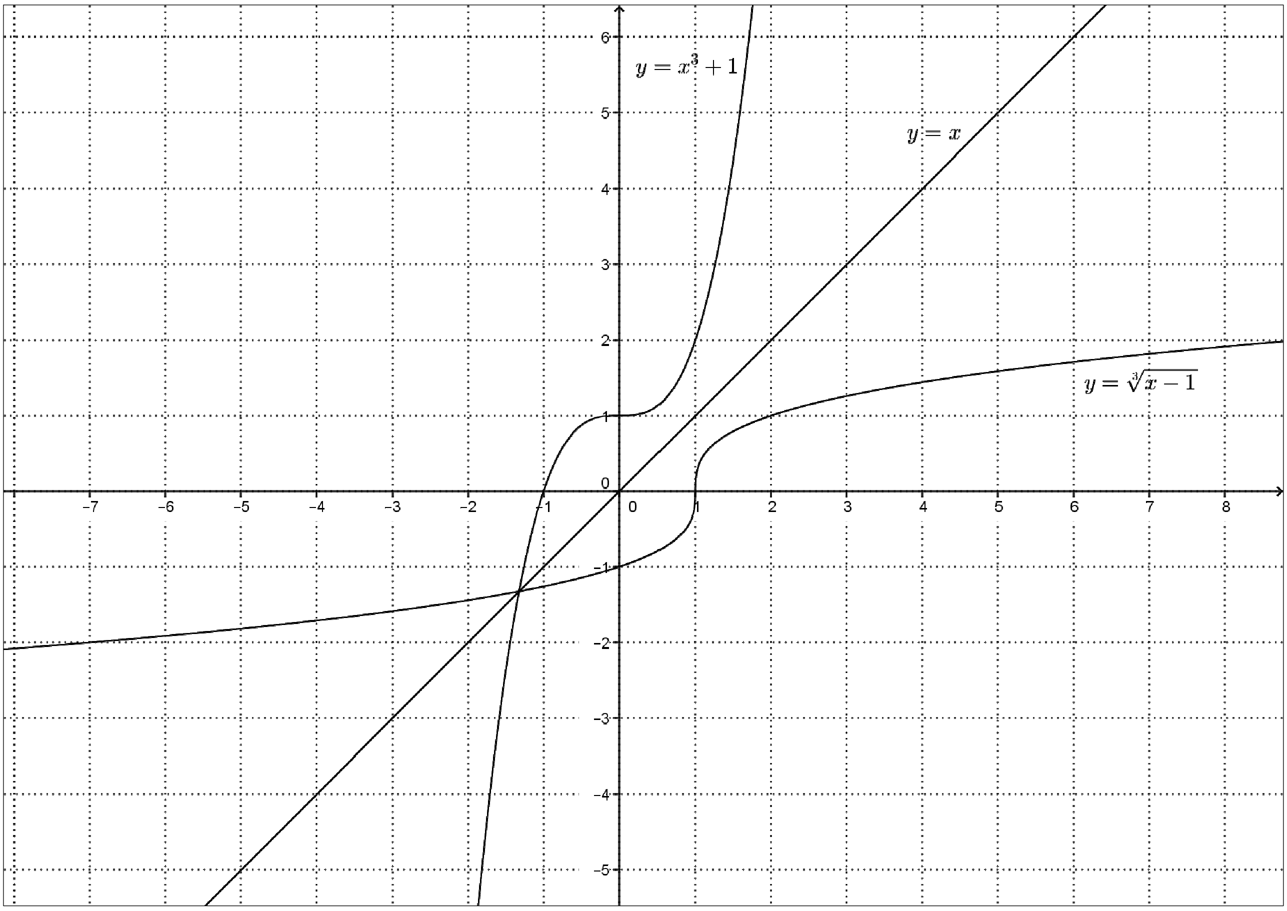
EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA RECIPROQUE D'UNE FONCTION

https://bit.ly/3gtCSYY

4. Lien entre les graphiques d'une fonction et de sa réciproque

Pour tracer le graphique de la réciproque d'une fonction *f*, on permute l'abscisse et l'ordonnée des points du graphique de *f*.

Dans un repère orthonormé, les graphiques d'une fonction et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$, appelée **première bissectrice**.



Puisque dans un repère orthonormé, les graphiques d'une fonction et de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice, les domaines et les ensembles-images vérifient les égalités suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{c} dom\, f^{-1} = \operatorname{Im} f \\ \operatorname{Im} f^{-1} = dom\, f \end{array}}$$

LIEN ENTRE LES GRAPHIQUES D'UNE FONCTION ET DE SA RECIPROQUE

https://bit.ly/3khDwd2

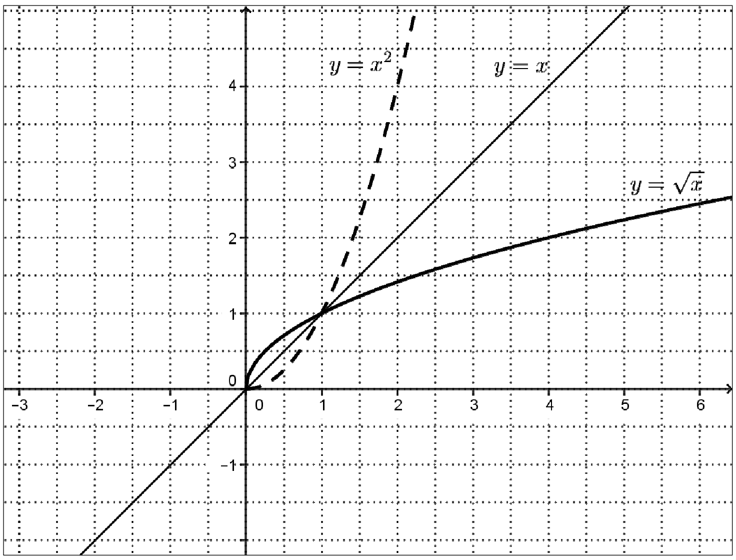
5. Restriction

Soit la fonction f définie par $y = x^2$. En permutant x et y on a : $x = y^2$. On isole y et on obtient $y = \pm\sqrt{x}$.

La réciproque de $y = x^2$ n'est donc pas une fonction !

Toutefois, en restreignant le domaine de la fonction f à un intervalle sur lequel deux réels différents ont des images distinctes, on obtient une fonction injective dont la réciproque est une fonction.

On restreint donc la fonction sur $\mathbb{R}^+$. On note $dom\, f_r = \mathbb{R}^+$.



6. Lien entre les dérivées de fonctions réciproques

La dérivée d'une fonction réciproque peut être facile à déterminer par les règles de calcul habituelles.

Cependant la dérivée d'une fonction réciproque f^{-1} peut aussi être déterminée à partir de la dérivée de la fonction f.

Théorème : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, injective.

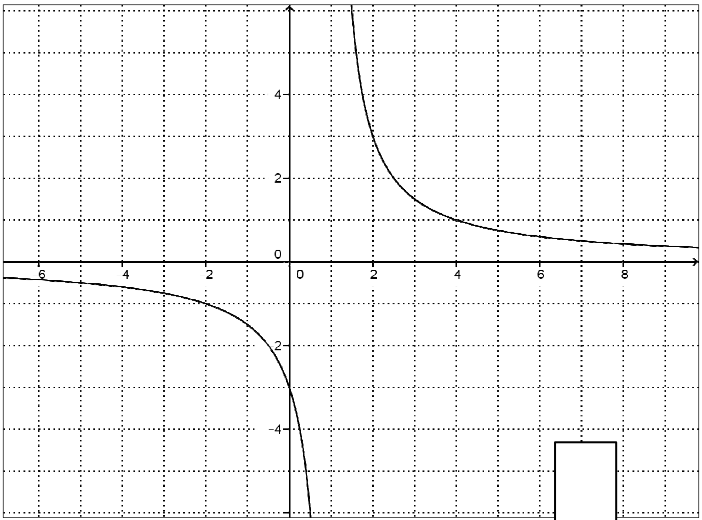
Soit $x \in dom\, f^{-1}$. Si f est dérivable en $f^{-1}(x)$ et si $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$, alors

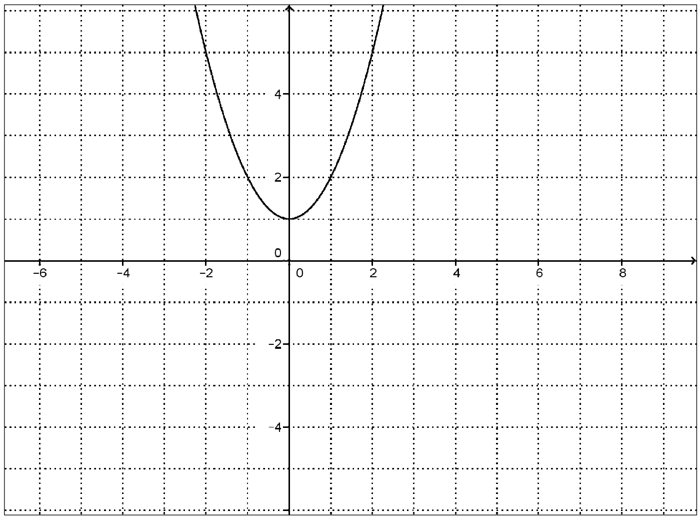
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

7. Exercices

https://bit.ly/44g6vTx

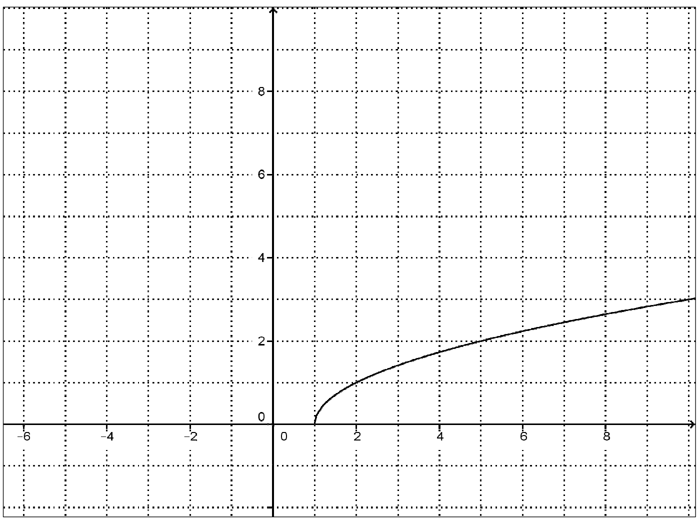
1. Trace le graphique de la réciproque de chacune des fonctions ci-dessous. Donne l'expression analytique de chaque réciproque et précise si cette réciproque est une fonction.





Comment déterminer l'expression analytique d'une fonction homographique à partir de son graphique ?

https://bit.ly/3gukmiQ



2. On considère la fonction $f\left(x\right)=\dfrac{4x+2}{2x+4}$.

   (1) Trace son graphique avec précision dans un repère orthonormé.

   (2) Trace sa réciproque dans ce même repère.

   (3) Détermine une expression analytique de $f^{-1}\left(x\right)$.

   (4) Cette réciproque est-elle une fonction ? Justifie.

COMMENT TRACER LE GRAPHIQUE D'UNE FONCTION HOMOGRAPHIQUE ?

https://bit.ly/3jihJTn

3. Détermine le domaine de définition et l'ensemble-image des fonctions suivantes. Précise si elles sont injectives et donne, le cas échéant, leur fonction réciproque. Dans le cas contraire, restreins le domaine de ces fonctions de manière à obtenir une fonction injective et détermine alors également la fonction réciproque.

   (1) $f\left(x\right)=2x+7$

   (2) $f\left(x\right)=x^4+2$

   (3) $f\left(x\right)=\sqrt{4x-3}$

   (4) $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-9}$

   (5) $f\left(x\right)=2x^2-10x+6$

   (6) $f\left(x\right)=\dfrac{5x-2}{3x+2}$

   (7) $f\left(x\right)=4-\sqrt{x-2}$

   (8) $f\left(x\right)=7+\sqrt[5]{2x+3}$

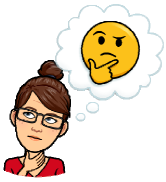
Besoin d'aide pour les exercices (5) et (6) ?

EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA RECIPROQUE D'UNE FONCTION

https://bit.ly/3gtCSYY

4. *Google Form* : « Fonctions réciproques »
   https://forms.gle/cDFW9RMwXZWtWJqR7

Pour chercher :



1. Détermine la fonction réciproque de la fonction $f(x)=\dfrac{x}{5-2x^2}\quad \forall x \neq 0$.

2. La réciproque d'une fonction du premier degré $f(x)=mx+p$ est-elle encore une fonction du premier degré ?
   Si oui, la fonction *f* et sa réciproque sont-elles représentées par des droites parallèles, perpendiculaires ou ni l'un ni l'autre ?

3. La réciproque d'une fonction homographique de la forme $f(x)=\dfrac{ax+b}{bx+a}$ est-elle toujours de la forme $f^{-1}(x)=\dfrac{-ax+b}{bx-a}$? Justifie ta réponse.