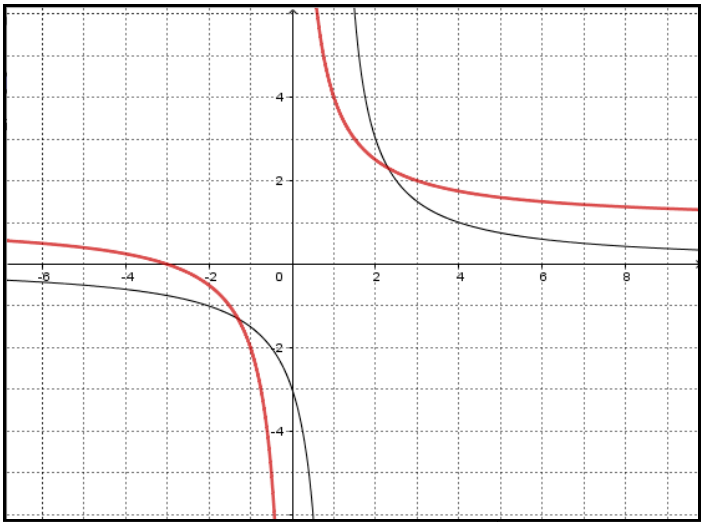
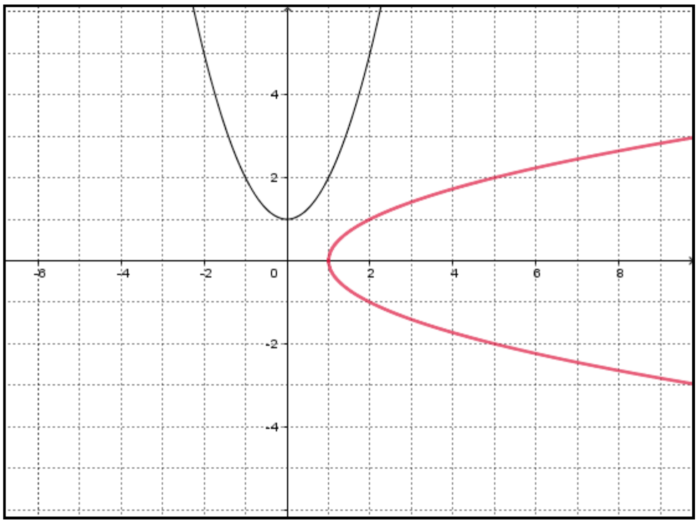
7. Exercices

1. Trace le graphique de la réciproque de chacune des fonctions ci-dessous. Donne l'expression analytique de chaque réciproque et précise si cette réciproque est une fonction.



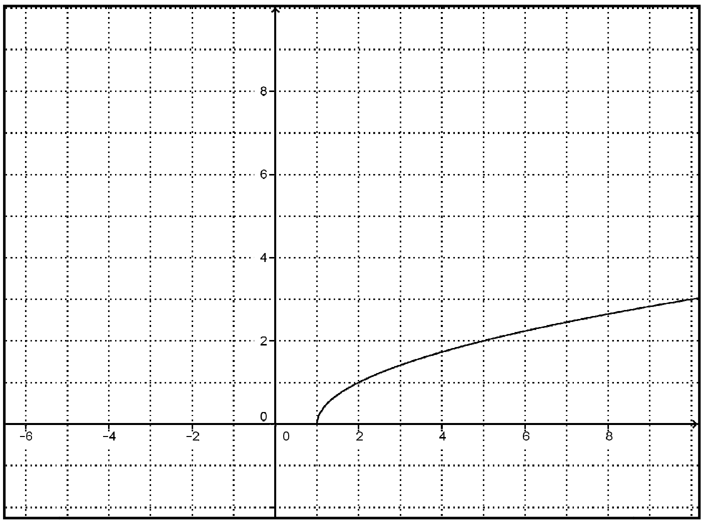


$f^{-1}(x)=\dfrac{3}{x}+1$

La réciproque est une fonction.

$f^{-1}(x)=\pm\sqrt{x-1}$

La réciproque n'est pas une fonction.



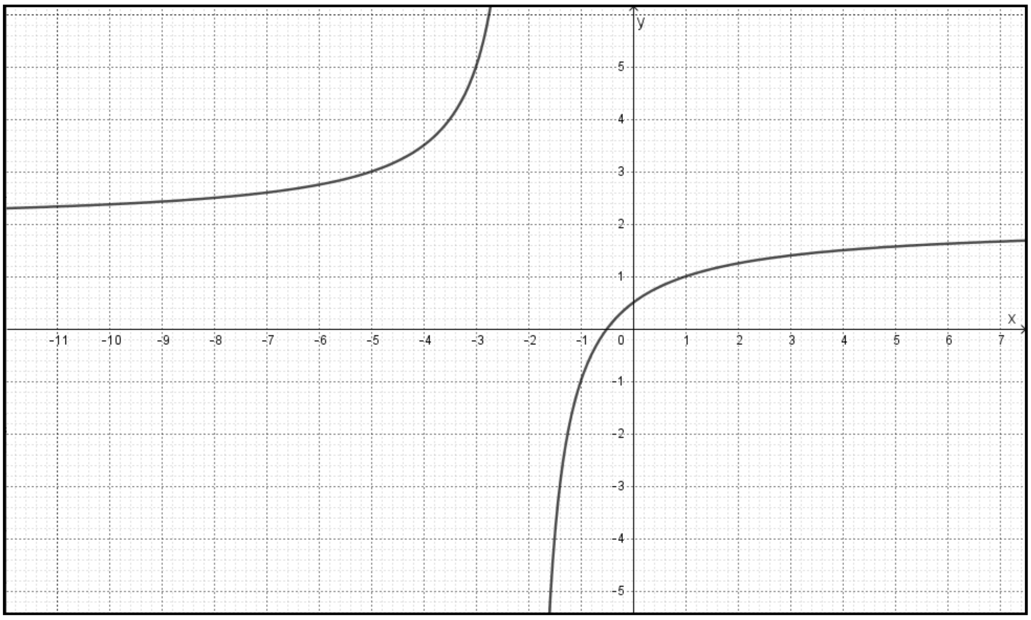
$f^{-1}(x)=x^2+1$ avec $x\geq 0$

La réciproque est une fonction

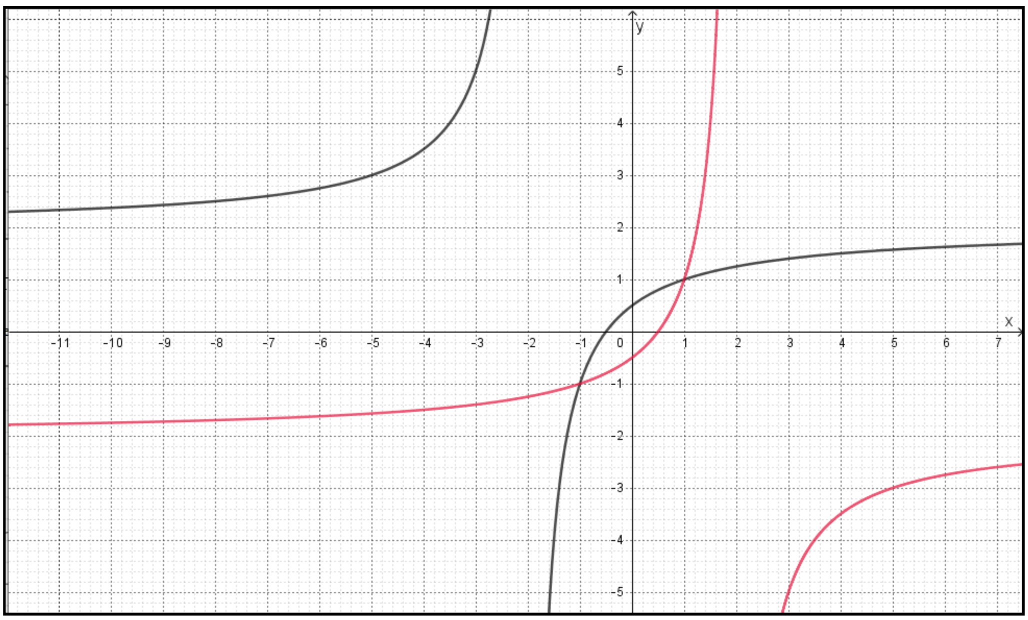
2. On considère la fonction $f\left(x\right)=\dfrac{4x+2}{2x+4}$.

(1) Trace son graphique avec précision dans un repère orthonormé.

On utilise la forme de somme de la fonction homographique donnée : $f\left(x\right)=2+\dfrac{-3}{x+2}$. A partir du graphique de la fonction inverse, on soustrait 2 à l'abscisse de tout point, on multiplie chaque ordonnée par -3 et on ajoute 2 à chaque ordonnée.



(2) Trace sa réciproque dans ce même repère.



(3) Détermine une expression analytique de $f^{-1}(x)$.

$$f^{-1}(x)=\frac{-4x+2}{2x-4} \text{ ou } f^{-1}(x)=-2-\frac{3}{x-2}$$

(4) Cette réciproque est-elle une fonction ? Justifie.

Oui, car la réciproque de *f* est également une *fonction* homographique.

3. Détermine le domaine de définition et l'ensemble-image des fonctions suivantes. Précise si elles sont injectives et donne, le cas échéant, leur fonction réciproque. Dans le cas contraire, restreins le domaine de ces fonctions de manière à obtenir une fonction injective et détermine alors également la fonction réciproque.

(1) $f(x)=2x+7$

(2) $f(x)=x^4+2$

(3) $f(x)=\sqrt{4x-3}$

(4) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

(5) $f(x)=2x^2-10x+6$

(6) $f(x)=\frac{5x-2}{3x+2}$

(7) $f(x)=4-\sqrt{x-2}$

(8) $f(x)=7+\sqrt[5]{2x+3}$

	Domaine	Ensemble-image	Injective ?	Domaine restreint	Réciproque
$f(x)=2x+7$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	oui	/	$f^{-1}(x)=\frac{x-7}{2}$
$f(x)=x^4+2$	$\mathbb{R}$	$[2;+\infty[$	**non**	$\mathbb{R}^+$	$f^{-1}(x)=\sqrt[4]{x-2}$
$f(x)=\sqrt{4x-3}$	$\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$	$\mathbb{R}^+$	oui	/	$f^{-1}(x)=\frac{x^2+3}{4}$ avec $x\geq 0$
$f(x)=\sqrt{x^2-9}$	$]-\infty;-3]$ $\cup\, [3;+\infty[$	$\mathbb{R}^+$	**non**	$[3;+\infty[$	$f^{-1}(x)=\sqrt{x^2+9}$ avec $x\geq 0$
$f(x)=2x^2-10x+6$	$\mathbb{R}$	$\left[-\frac{13}{2};+\infty\right[$	**non**	$\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$	$f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{13}{4}}+\frac{5}{2}$ avec $x\geq -\frac{13}{2}$

$f(x)=\dfrac{5x-2}{3x+2}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$	oui	/	$f^{-1}(x)=\dfrac{-2x-2}{3x-5}$
$f(x)=4-\sqrt{x-2}$	$[2;+\infty[$	$]-\infty;4]$	oui	/	$f^{-1}(x)=(4-x)^2+2$ avec $x\leq 4$
$f(x)=7+\sqrt[5]{2x+3}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	oui	/	$f^{-1}(x)=\dfrac{(x-7)^5-3}{2}$