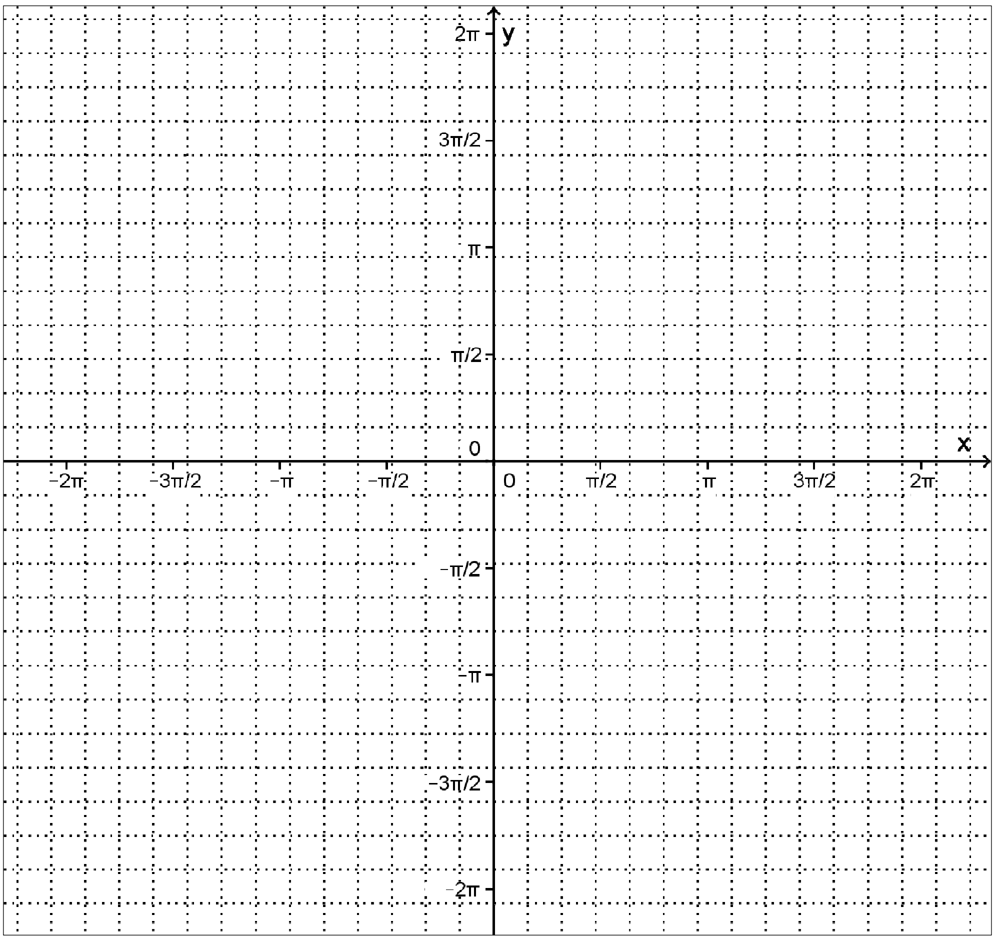
C. Fonctions cyclométriques

Les fonctions trigonométriques sont des fonctions périodiques, elles ne sont donc pas injectives.
Pour obtenir des réciproques qui soient des fonctions, nous devrons, dans chaque cas, prendre une restriction, c'est-à-dire les étudier sur un intervalle inclus dans leur domaine où elles sont injectives.
Les fonctions réciproques des restrictions des fonctions trigonométriques sont appelées **fonctions cyclométriques**.

1. Fonction arcsinus

(1) Activité

Dessine le graphe de la fonction sinus et celui de sa réciproque dans le repère ci-dessous :



La réciproque de la fonction sinus est-elle une fonction ? ....

A quel intervalle I peux-tu restreindre la fonction sinus afin que sa réciproque soit une fonction ? Un tel intervalle I est-il unique ? ....
Quels sont alors le domaine de définition et l'ensemble-image de cette fonction réciproque ?
....

(2) Définition

On vient de voir que la réciproque de la fonction sinus : $\mathbb{R} \to [-1;1]$ n'est pas une fonction.

On restreint alors la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Cette restriction est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$.

Sa réciproque est également une bijection de $[-1;1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Elle est nommée **arcsinus** et notée arcsin ou $\sin^{-1}$, pour rappeler qu'il s'agit de la réciproque de la fonction sinus.

<u>Définition :</u> $\arcsin : [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] : x \mapsto \arcsin x$ tel que

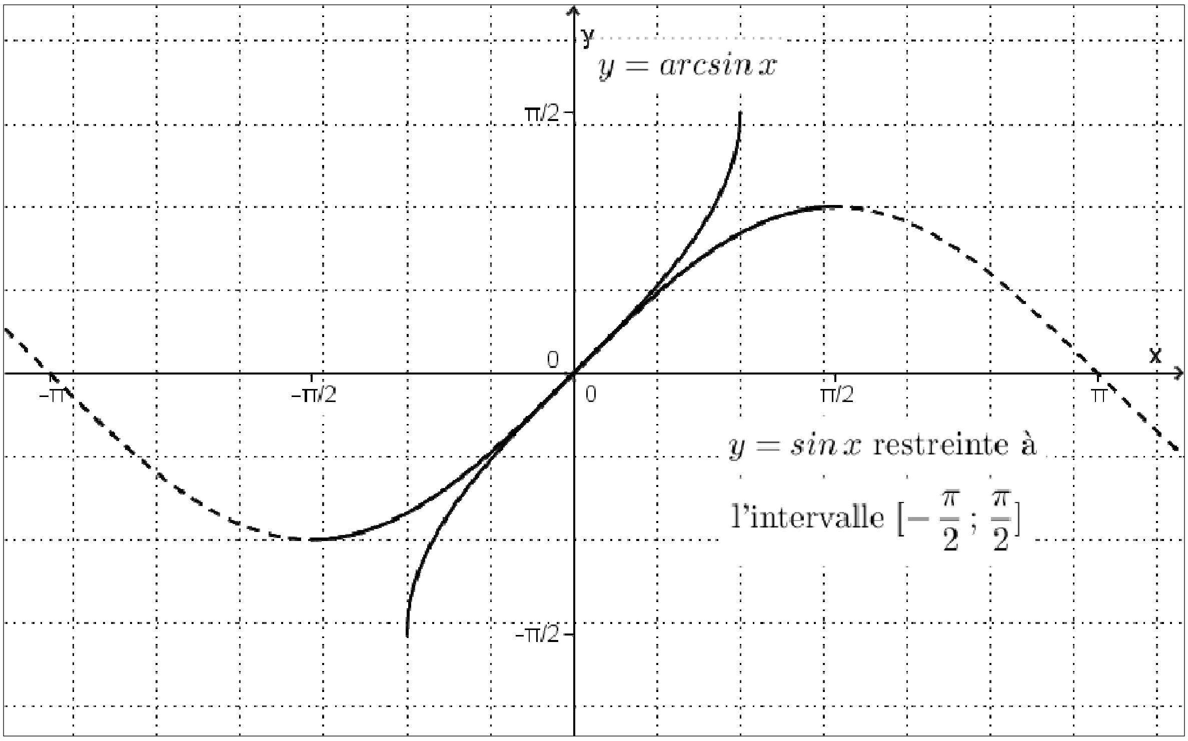
$$\arcsin x = y \iff x = \sin y \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

<u>Exemples :</u> (1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ car $\frac{\pi}{3}$ est l'amplitude en radians, comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, de l'angle dont le sinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) $\arcsin 0 = 0$

(3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, le graphe cartésien de la fonction arcsinus est le symétrique du graphe cartésien de la restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par rapport à la première bissectrice du repère.



On observe sur le graphique que la fonction arcsinus est impaire : $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Sa racine est $x = 0$.

Cette fonction est croissante, continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$.

De plus, $\forall x \in [-1;1] : \sin(\arcsin x) = x$ et $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] : \arcsin(\sin x) = x$

De ces deux propriétés, on peut déduire que

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Toutefois, il faudra être attentif au domaine de validité de ces propriétés.

Ainsi, $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) \neq \frac{2\pi}{3}$ car $\frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

On aura plutôt $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

FONCTION ARCSINUS

[HTTPS://BIT.LY/38DS24A](https://bit.ly/38DS24A)

(3) Dérivée

Propriété : La fonction arcsinus est dérivable sur $]-1;1[$.

Pour tout x de $]-1;1[$, $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Démonstration :

La démonstration en vidéo : « Dérivée de la fonction arcsinus ».

https://bit.ly/3sJt6H0

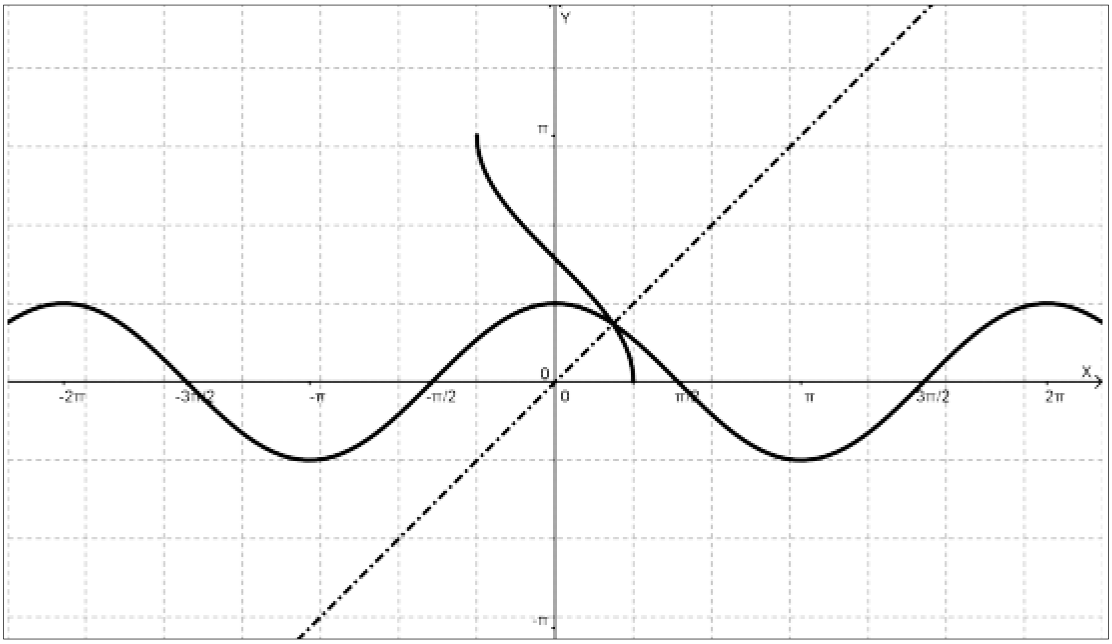
De plus, le théorème de dérivation des fonctions composées nous permet d’écrire :

$$\left[\arcsin\left(f(x)\right)\right]' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

2. Fonction arccosinus

(1) Activité

Sur le graphique ci-dessous est représenté le graphe de la fonction cosinus et de sa réciproque...



Sur quel domaine la fonction cosinus a-t-elle été restreinte afin que sa réciproque soit une fonction ? ....

Quels sont alors le domaine de définition et l'ensemble-image de cette fonction réciproque ?

....

(2) Définition

La réciproque de la fonction cosinus : $\mathbb{R} \to [-1;1]$ n'est pas une fonction. On restreint alors la fonction cosinus à $[0;\pi]$. Cette restriction est une bijection de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$.

Sa réciproque est également une bijection de $[-1;1]$ sur $[0;\pi]$. Elle est nommée **arccosinus** et notée arccos ou $\cos^{-1}$, pour rappeler qu'il s'agit de la réciproque de la fonction cosinus.

Définition : $\arccos : [-1;1] \to [0;\pi] : x \mapsto \arccos x$ tel que

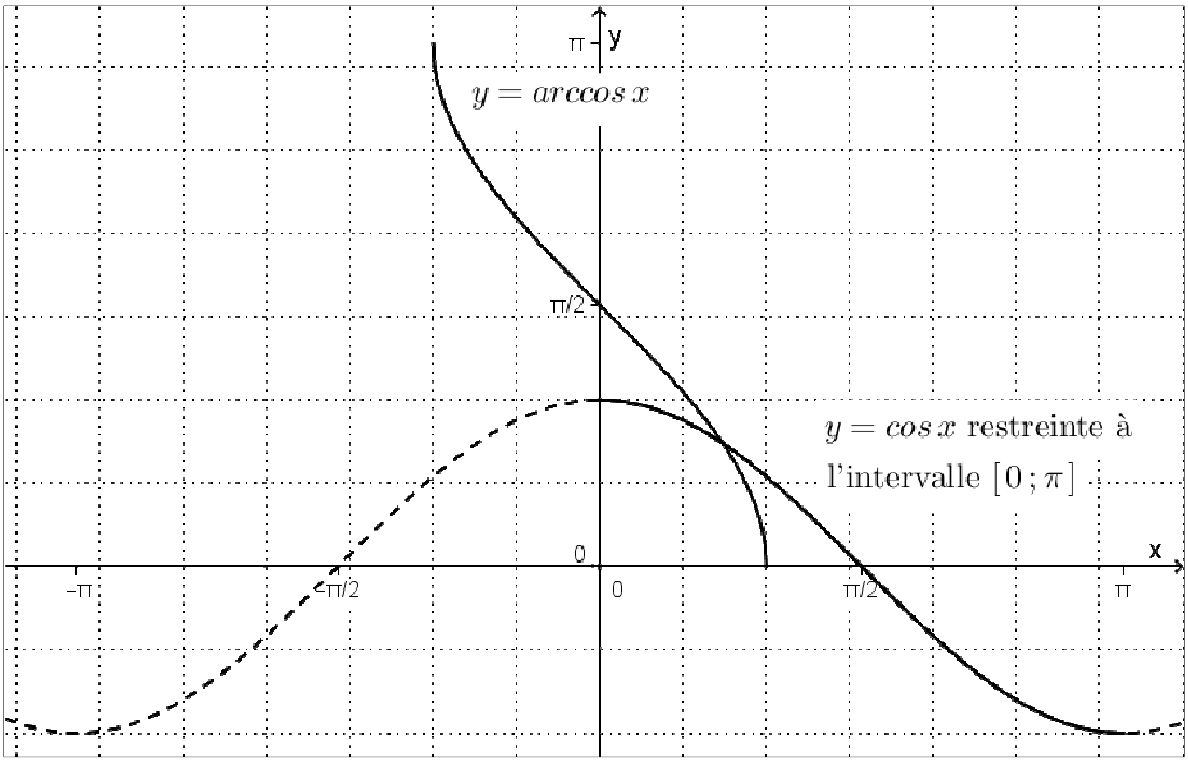
$$\arccos x = y \iff x = \cos y \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq \pi$$

Exemples : (1) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ car $\frac{\pi}{2}$ est l'amplitude en radians, comprise entre 0 et π, de l'angle dont le cosinus vaut 0.

(2) $\arccos(-1) = \pi$

(3) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, le graphe cartésien de la fonction arccosinus est le symétrique du graphe cartésien de la restriction de la fonction cosinus à $[0;\pi]$ par rapport à la première bissectrice du repère.



On observe sur le graphique que la fonction arccosinus n'est ni paire, ni impaire, elle est quelconque.

Sa racine est $x = 1$.

Cette fonction est décroissante, continue sur $[-1;1]$, dérivable sur $]-1;1[$ et positive.

De plus, $\forall x \in [-1;1] : \cos(\arccos x) = x$ et $\forall x \in [0;\pi] : \arccos(\cos x) = x$

De ces deux propriétés, on peut déduire que

$$\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \arccos\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Toutefois, il faudra être attentif au domaine de validité de ces propriétés.

Ainsi, $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \neq -\frac{\pi}{6}$ car $-\frac{\pi}{6} \notin [0;\pi]$.

On aura plutôt $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6} \in [0;\pi]$.

Fonction arccosinus

https://bit.ly/3Ba1nlE

(3) Dérivée

<u>Propriété :</u> La fonction arccosinus est dérivable sur $]-1;1[$.

Pour tout x de $]-1;1[$, $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

<u>Démonstration :</u>

La démonstration en vidéo : « Dérivée de la fonction arccosinus ».

https://bit.ly/2WsHurf

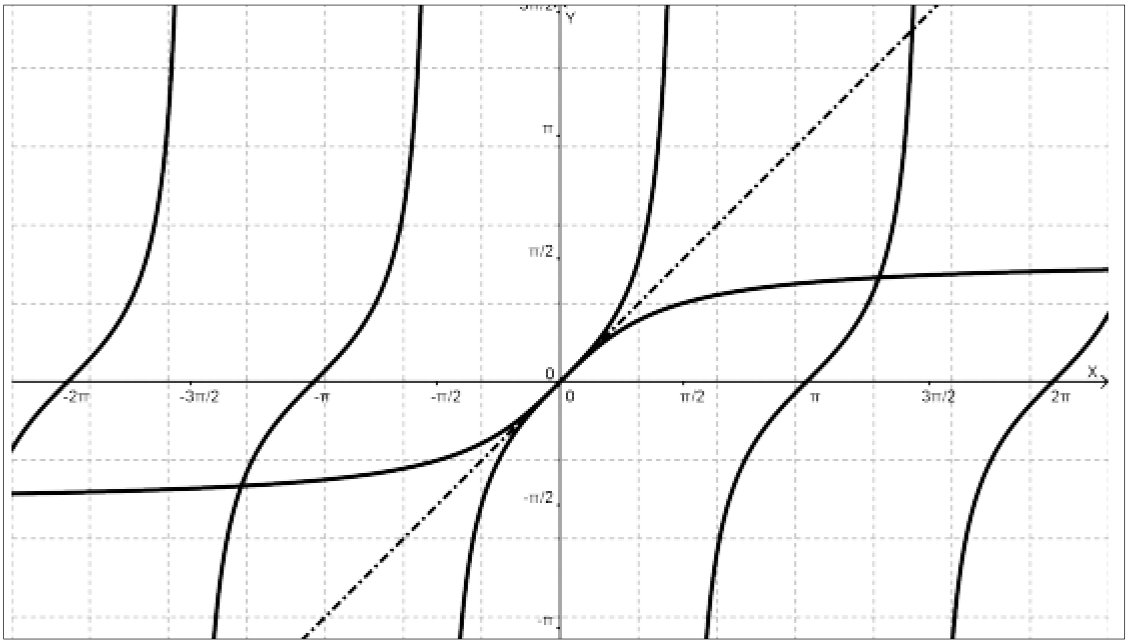
De plus, le théorème de dérivation des fonctions composées nous permet d'écrire :

$$\left[\arccos\left(f(x)\right)\right]' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

3. Fonction arctangente

(1) Activité

Sur le graphique ci-dessous est représenté le graphe de la fonction tangente et de sa réciproque...



Sur quel domaine la fonction tangente a-t-elle été restreinte afin que sa réciproque soit une fonction ? ....

Quels sont alors le domaine de définition et l'ensemble-image de cette fonction réciproque ? ....

(2) Définition

La réciproque de la fonction tangente : $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$ n'est pas une fonction. On restreint alors la fonction tangente à $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$. Cette restriction est une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ sur $\mathbb{R}$.

Sa réciproque est également une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$. Elle est nommée **arctangente** et notée arctan ou $\tan^{-1}$, pour rappeler qu'il s'agit de la réciproque de la fonction tangente.

Définition : $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[: x \mapsto \arctan x$ tel que

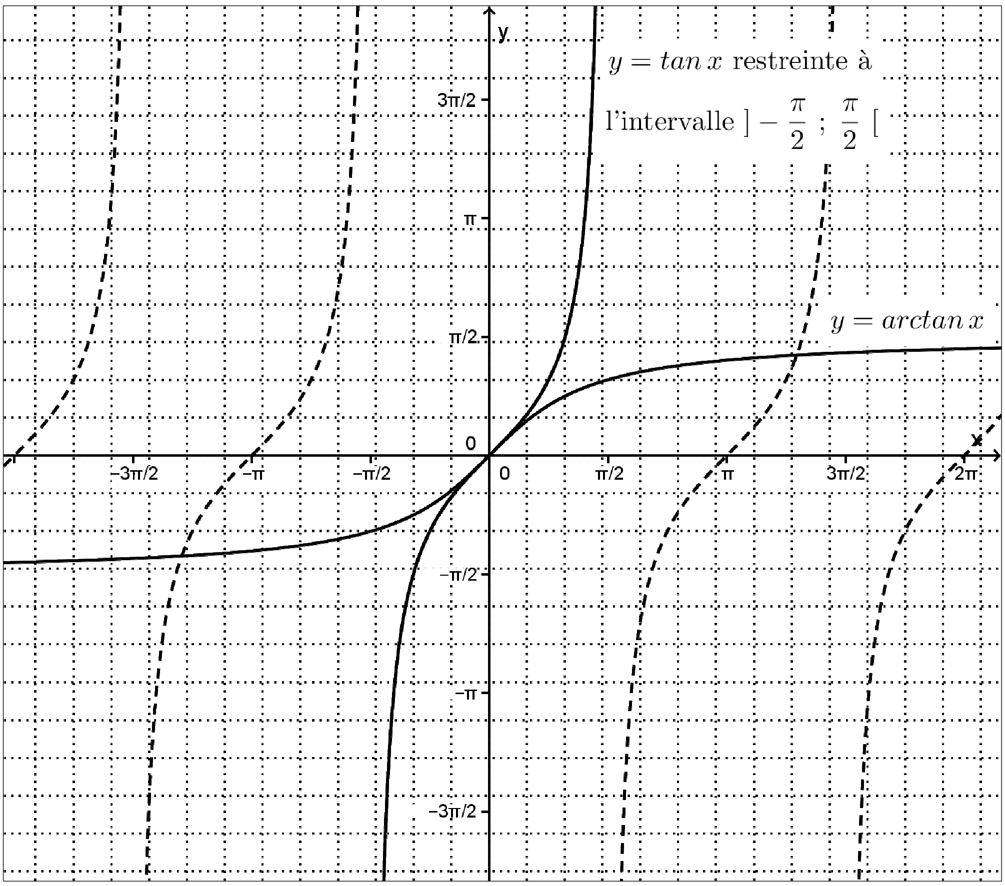
$\arctan x = y \iff x = \tan y \quad$ et $\quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Exemples : (1) $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ car $-\frac{\pi}{4}$ est l'amplitude en radians, strictement comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, de l'angle dont la tangente vaut -1.

(2) $\arctan 0 = 0$

(3) $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, le graphe cartésien de la fonction arctangente est le symétrique du graphe cartésien de la restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par rapport à la première bissectrice du repère.



On observe sur le graphique que la fonction arctangente est impaire : $\arctan(-x) = -\arctan x$.

Sa racine est $x = 0$.

Cette fonction est croissante, continue et dérivable.

On observe également que :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2}$ est asymptote horizontale au graphe de $f(x) = \arctan x$ en $+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$ $\quad \Rightarrow y = -\dfrac{\pi}{2}$ est asymptote horizontale au graphe de $f(x) = \arctan x$ en $-\infty$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R} : \tan(\arctan x) = x$ et $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[: \arctan(\tan x) = x$

De ces deux propriétés, on peut déduire que

$\tan\left(\arctan\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$ et $\arctan\left(\tan\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

Toutefois, il faudra être attentif au domaine de validité de ces propriétés.

Ainsi, $\arctan\left(\tan\dfrac{2\pi}{3}\right) \neq \dfrac{2\pi}{3}$ car $\dfrac{2\pi}{3} \notin \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On aura plutôt $\arctan\left(\tan\dfrac{2\pi}{3}\right) = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

FONCTION ARCTANGENTE

[HTTPS://BIT.LY/3BJIB5D](https://bit.ly/3BJIB5D)

(3) Dérivée

Propriété : La fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration :

De plus, le théorème de dérivation des fonctions composées nous permet d'écrire :

$$\left[\arctan\left(f(x)\right)\right]' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

4. Règle de l'Hospital

La règle de l'Hospital, bien qu'elle ait été découverte par le mathématicien suisse Bernoulli (1667-1748), permet de lever des indéterminations dans le calcul de certaines limites.

Propriété : Si f et g sont deux fonctions continues et dérivables en a telles que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Démonstration :

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{2x} =$

Le saviez-vous ?

La règle de l'Hospital…une supercherie

G. de l'Hospital
(1661-1704)

Officier de cavalerie, Guillaume de l'Hospital, marquis de Saint-Mesme, fut très apprécié par ses contemporains. Il publia en 1696 « l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes ». Cet ouvrage, premier du genre, contribua largement à promouvoir les méthodes du calcul infinitésimal de l'allemand Gottfried Leibniz.

G. Leibniz

Il défendit cet algorithme contre les attaques d'un autre mathématicien français, Michel Rolle (1652-1719) qui publia des travaux d'algèbre et d'analyse et qui considérait les nouvelles méthodes de calcul infinitésimal dues à Leibniz comme « une collection d'illusions trompeuses ».

M. Rolle
(1652-1719)

Beaucoup de contemporains ignorèrent que le mathématicien aristocrate avait passé avec le suisse Jean Bernoulli un contrat de publication des travaux de ce dernier.

Ce n'est que bien après la mort du français que Bernoulli constata que son collègue avait publié plusieurs de ses découvertes sous le nom de Guillaume de l'Hospital. Ainsi, donc, la célèbre règle de levée de certaines indéterminations n'est pas de lui mais bien de… Bernoulli.

J. Bernoulli
(1667-1748)

5. Exercices

https://bit.ly/45ixejM

1. Détermine la valeur des expressions suivantes en radians, sans calculatrice.

   (1) $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   (2) $\arcsin(-0,5)$

   (3) $\arctan 1$

   (4) $\arcsin\left(\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$

   (5) $\arccos\left(\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$

   (6) $\arctan\left(\tan\dfrac{\pi}{3}\right)$

2. Trace le graphe des fonctions suivantes au départ des fonctions usuelles et détermine leurs domaine, racine(s), ensemble-image et éventuelles asymptotes :

   (1) $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

   (2) $f(x)=\arcsin(2x+2)$

   (3) $f(x)=\arccos(x-1)$

   (4) $f(x)=2\arctan(x+2)$

   (5) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$

   (6) $f(x)=\arccos x+1$

3. Détermine une expression analytique de la réciproque des fonctions suivantes :

   (1) $f(x)=3.\sin(2x)+1$

   (2) $f(x)=\arccos(3x)-4$

   (3) $f(x)=\arctan\left(\dfrac{2}{5}x\right)$

4. Donne les conditions d'existence, le domaine de définition, la(les) racine(s) et la dérivée des fonctions suivantes :

   (1) $f(x) = \arcsin(2x)$

   (2) $f(x) = \arcsin(x+1)$

   (3) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

   (4) $f(x) = \arccos\sqrt{x^2 - 1}$

   (5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \arcsin x$

   (6) $f(x) = \arccos\left(\frac{x}{x-1}\right)$

5. (1) Si $y = \arcsin x$, que valent $\sin y, \cos y, \tan y$?

   (2) Si $y = \arccos x$, que valent $\cos y, \sin y, \tan y$?

   (3) Si $y = \arctan x$, que valent $\tan y, \sin y, \cos y$?

Astuce : On utilise un triangle rectangle et les nombres trigonométriques, avec la « formule » SOHCAHTOA.

L'exercice (1) en vidéo : « Calculer les nombres trigonométriques d'un nombre cyclométrique ».

https://bit.ly/2WpKrst

6. Vérifie les identités suivantes (sans calculatrice) :

(1) $\forall x \in [-1;1] : \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

(2) $\arctan \dfrac{1}{2} + \arctan \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

(3) $\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

(4) $\arctan \dfrac{1}{5} + \arctan \dfrac{1}{2} + \arctan \dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$

Astuce : On « injecte » une fonction trigonométrique de part et d'autre de l'égalité.

L'exercice (1) en vidéo : « Vérifier une identité cyclométrique ».

https://youtu.be/dC_FwV5VGsY

7. Résous les équations suivantes :

(1) $\arcsin(2x+4) = 0$

(2) $\arccos(2x) + 4 = 0$

(3) $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \dfrac{\pi}{4}$

(4) $\arcsin 2x = \dfrac{\pi}{4} + \arcsin x$

(5) $\arcsin \dfrac{3}{5} + \arcsin \dfrac{4}{5} = x$

(6) $\arccos x = 2.\arccos\left(\dfrac{3}{4}\right)$

(7) $\arccos(2x) - \arccos x = \dfrac{\pi}{3}$ *(ULB,Juillet 2015)*

Astuce : On « injecte » une fonction trigonométrique de part et d'autre de l'égalité. Mais cette méthode introduit des solutions parasites car les fonctions trigonométriques ne sont pas injectives.

L'exercice (3) en vidéo : « Résoudre une équation cyclométrique »

https://bit.ly/3muhne7

« Résoudre une équation irrationnelle » (contenant au moins une racine carrée)

https://bit.ly/3mBeOaf

8. Détermine une équation de la tangente à la courbe d'équation $y = 2\arccos\left(x^2 - 2x\right)$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

9. Calcule les limites suivantes et donnes-en une interprétation graphique :

(1) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2} + 2\cos x}{\tan^2 x - 1}$

(2) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \arcsin(2x - 1)$

(3) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \arccos(1 - x)$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\arctan 2x}$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x.\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-2x}{\sin^3 x}$

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}}\dfrac{\arccos x-\arcsin x}{x^2-\frac{1}{2}}$

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\arccos x}{\arcsin x}$

10. Recherche les équations des asymptotes de la fonction $f(x)=x^2.\arctan\dfrac{1}{1+x}$.

11. Fais l'étude complète de la fonction $f(x)=\arctan\left(\dfrac{-x}{x+2}\right)$ (domaine, parité, intersection avec les axes, asymptotes, dérivée première et croissance, dérivée seconde et concavité, tableau récapitulatif, graphique)

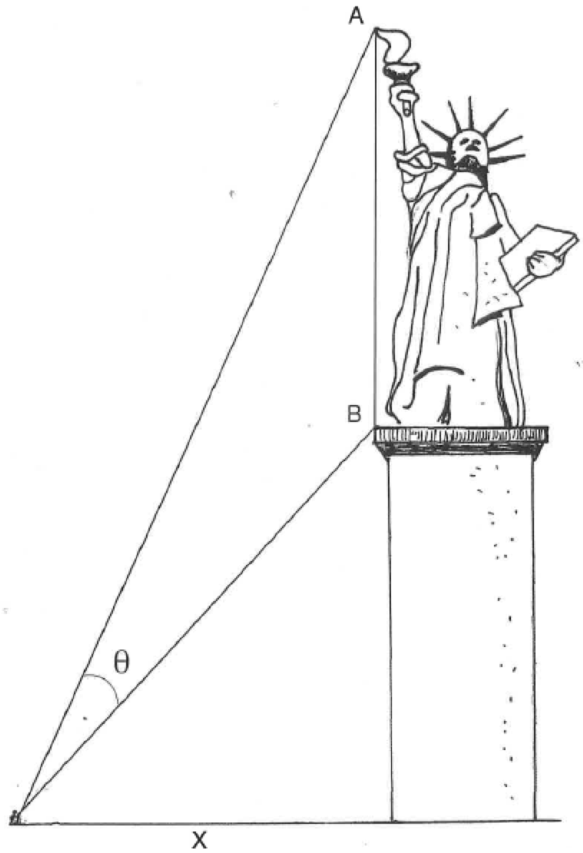
12. Lors d'une exposition de peinture, un amateur d'art observe un tableau d'une hauteur de 2,8 m suspendu à 1,2 m du sol. Les yeux de l'observateur sont à 1,7 m du sol. A quelle distance du mur doit-il se tenir s'il veut observer le tableau sous un angle de vision de 45° ?

13. Un photographe cherche à déterminer la distance x à laquelle il doit placer son appareil pour prendre une photo de la statue de la liberté sous un angle θ maximal.

On admet que θ est compris entre 0° et 90°.

Voici les conditions à respecter :

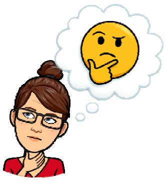
- l'appareil photo est à 1,5 m du sol ;
- le piédestal a pour hauteur 45 m ;
- la statue mesure également 45 m de hauteur.



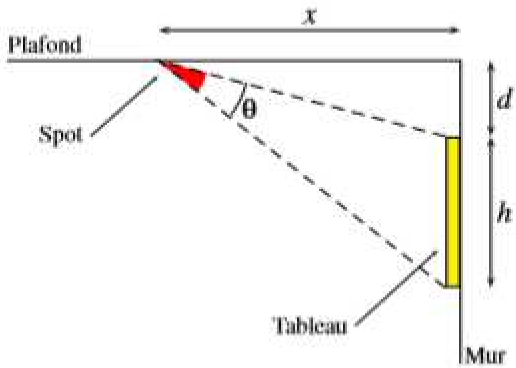
14. *Google Form* : « Fonctions cyclométriques »

https://forms.gle/hnhamDRtQuKvTAnm7

Pour chercher :



1. On désire éclairer, au moyen d'un spot unique fixé au plafond, un tableau de hauteur $h \neq 0$ suspendu au mur, comme illustré ci-dessous. On considère une approche bidimensionnelle. On note d la distance (mesurée verticalement) entre le dessus du tableau et le plafond et x la distance (mesurée horizontalement) entre le spot et le mur.



L'angle θ que doit couvrir le spot pour éclairer le tableau dépend de la distance x par la relation $\theta(x) = \arctan\left(\dfrac{d+h}{x}\right) - \arctan\left(\dfrac{d}{x}\right)$.

(1) Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} \theta(x)$ en discutant s'il y a lieu en fonction des paramètres d et h.

(2) En considérant d et h comme des paramètres fixés, détermine la valeur maximale de l'angle θ et exprime cette valeur en fonction de d et h.

2. Etudie la fonction $f(x) = \arctan \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ en discutant s'il y a lieu en fonction des valeurs du paramètre $a \geq 0$. En particulier, détermine

   (1) le domaine de définition de f

   (2) les asymptotes éventuelles

   (3) croissance / décroissance / extrema

   (4) concavité / points d'inflexion

   (5) Esquisse le graphe de f.

(d'après *Examen d'admission, ULg, 2002*)